UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

Aplicaciones de desigualdades con pesos a ecuaciones diferenciales

Trabajo de Tesis Doctoral

MARIA EUGENIA CEJAS

Director: Ricardo Durán

Codirector: Gabriel Acosta

Año 2016.

Índice general

Agradecimientos

A mi familia por apoyarme en cada decisión y por su incondicionalidad.

A mis directores, Ricardo y Gabriel, por aceptarme y ayudarme a crecer en esta profesión.

A mis amigos, a los de siempre y a los que me dio este trabajo, por ser mi refugio y sostén.

Resumen

Esta tesis se centra en estudiar la desigualdad de Poincaré mejorada con pesos y aplicaciones del Análisis Armónico a las ecuaciones diferenciales.

En primer lugar obtenemos un teorema general que nos provee condiciones que deben cumplir dos pesos para que valga la desigualdad de Poincaré mejorada

$$||\varphi - \varphi_{\Omega,w}||_{L^p_w(\Omega)} \leq C||d\nabla\varphi||_{L^p_v(\Omega)}$$

para un dominio Ω acotado y de John. Gracias a este teorema podemos proveer varios ejemplos de pesos que no están en la clase de Muckenhoupt A_p, en el caso particular de $w = v$, para los cuales vale la desigualdad anterior.

Para obtener aplicaciones a las ecuaciones diferenciales estudiamos la descomposición de una función de promedio cero como suma de funciones soportadas en cubos y de promedio cero. Esta descomposición está relacionada con la desigualdad de Poincaré mejorada y nos resultará útil para obtener la resolubilidad de la divergencia en espacios de Sobolev con pesos y así también para probar la desigualdad de Fefferman-Stein con pesos, en ambos casos para una clase de pesos más general que la A_p.

Damos un teorema general para que valga la resolubilidad de la divergencia en espacios de Sobolev.

Por último estudiamos estimaciones a priori de soluciones de sistemas uniformemente elípticos en espacios con pesos A_p. Damos una prueba más simple de la ya obtenida. Para ello necesitamos utilizar la desigualdad de Fefferman-Stein y una estimación puntual que involucra la función maximal sharp y la función maximal de Hardy-Littlewood. Además obtenemos como depende del peso la constante de las estimaciones a priori y probamos que está constante es sharp. En la línea de los sistemas elípticos obtenemos estimaciones a priori con dos pesos. En el caso particular del problema de Dirichlet para potencias del laplaciano damos una condición necesaria sobre el peso para que valgan las estimaciones a priori.

Introducción

Estimaciones en normas con pesos para operadores clásicos como la función maximal de Hardy-Littlewood, las integrales singulares de Calderón-Zygmund y las integrales fraccionarias han sido estudiadas en numerosos trabajos en los últimos cincuenta años. Algunos de estos trabajos son [S3, SW] para pesos tipo $|x|^\alpha$ y [M, MW] para una clase más general de pesos. En particular en [M], Muckenhoupt caracteriza los pesos para los cuales el operador maximal de Hardy-Littlewood es continuo en una dimensión, esta clase de pesos es la llamada A_p. Luego, Coifman y Fefferman [CF] generalizan el resultado de Muckenhoupt para cualquier dimensión. Tiempo después se obtiene que la condición A_p es necesaria y suficiente para la continuidad de las transformadas de Hilbert y las transformadas de Riesz (ver [GCRF]). De hecho, en [S1] el autor generaliza este resultado para ciertos operadores integrales singulares de tipo convolución.

En muchas aplicaciones, particularmente en el análisis de ecuaciones diferenciales parciales, aparecen las desigualdades con pesos. Muchas de estas desigualdades fueron probadas para pesos A_p, dado que para obtenerlas se utilizan operadores como la maximal de Hardy-Littlewood o integrales singulares.

Para ejemplificar, utilizando la integral fraccionaria se obtiene la desigualdad de Poincaré mejorada y utilizando operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund se obtienen la resolubilidad de la divergencia en espacios de Sobolev (ver [DD, S, ADM]) y las estimaciones a priori de soluciones de sistemas elípticos en el sentido del trabajo clásico [ADN]. Estos operadores nos permiten obtener resultados en normas L^p así como en normas con pesos A_p. En esta tesis obtenemos generalizaciones de algunos de estos resultados en espacios con pesos más generales que la clase A_p.

En la primera parte de la tesis estudiaremos la desigualdad de Poincaré mejorada y sus aplicaciones. Dado un dominio Ω acotado, la desigualdad de Poincaré mejorada está dada por

$$||\varphi - \varphi_\Omega||_{L^p(\Omega)} \leq C||d\nabla\varphi||_{L^p(\Omega)} \tag{0.0.1}$$

donde $\varphi_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varphi$, $d(x)$ es la distancia de x al borde de Ω y C es una constante que depende sólo de p y de Ω. Esta desigualdad fue obtenida bajo distintas hipótesis del dominio Ω. Por ejemplo, en [BS], usando argumentos de compacidad, los autores prueban (0.0.1) para dominios Lipschitz. Luego, en [H1] el autor obtiene la desigualdad (0.0.1) en dominios de John utilizando una técnica más constructiva basada en una descomposición de Whitney del dominio. Los dominios de John se consideran por primera vez en [J], y son llamados de este modo por Martio y Sarvas en [MS]. En pocas palabras un dominio es de John si es posible conectar dos puntos cualesquiera del dominio sin acercarse demasiado al borde. Esta clase contiene a los dominios Lipschitz pero es mucho más grande. Por ejemplo, dominios con cúspides internas son dominios de John. Una prueba diferente de (0.0.1) en el caso de dominios de John fue obtenida en [DD], donde los autores utilizan el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Una pregunta natural es si es posible extender la desigualdad (0.0.1) en normas con pesos, es decir

$$||\varphi - \varphi_{\Omega,w}||_{L^p_w(\Omega)} \leq C||d\nabla\varphi||_{L^p_w(\Omega)} \tag{0.0.2}$$

donde $\varphi_{\Omega,w} = \frac{1}{w(\Omega)}\int_\Omega \varphi w$. En [DD] se prueba que esta desigualdad es válida para dominios de John si $w \in A_p$. En esta tesis obtenemos (0.0.2) para una clase más general que la clase A_p. Este resultado se obtiene como consecuencia de un teorema general que provee condiciones para un par de pesos (w, v) para que valga la desigualdad de Poincaré mejorada con dos pesos

$$||\varphi - \varphi_{\Omega,w}||_{L^p_w(\Omega)} \leq C||d\nabla\varphi||_{L^p_v(\Omega)} \tag{0.0.3}$$

En el caso $w = v$ obtenemos esta desigualdad para una clase de pesos introducidos en [FKS]. Los autores obtienen la desigualdad clásica con pesos

$$||\varphi||_{L^p_w(\Omega)} \leq C||\nabla\varphi||_{L^p_w(\Omega)} \tag{0.0.4}$$

donde $w \in A_p$, Ω es una bola y φ vale cero en el borde de la bola. Además en [FKS] se prueba la desigualdad (0.0.4) en el caso en que Ω es una bola en dimensión $n \geq 3$, $p = 2$ y $w(x) = Jf(x)^{1-\frac{2}{n}}$ donde Jf es el valor absoluto del jacobiano de una aplicación cuasi-conforme. Como un caso particular, los autores obtienen la desigualdad (0.0.4) para pesos $w(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha > 0$. Notemos que $w \notin A_2$ si $\alpha \geq n$. En esta tesis mostramos que (0.0.2) y consecuentemente (0.0.4) son válidas para los pesos considerados en [FKS], y más en general, para un dominio Ω acotado y de John y $w(x) = Jf(x)^{1-\frac{p}{n}}$, $1 \leq p < n$.

Como aplicación de los resultados que obtenemos, probamos (0.0.2) para pesos del tipo $|x|^\alpha$ con $\alpha > 0$ sin utilizar aplicaciones cuasi-conformes y para $1 \leq p < \infty$, obteniendo así una prueba distinta y sin restricciones de p.

Las desigualdades del tipo Poincaré son válidas en dominios muy generales si son válidas en bolas o cubos contenidos en el dominio. De hecho esto fue probado en [C, H2] utilizando argumentos del trabajo [IN]. Por ejemplo, la desigualdad (0.0.4) fue probada en [C] para pesos en la clase A_p y en dominios que satisfacen la condición de la cadena de Boman. En el caso de dominios acotados esta condición es equivalente a la condición de John (ver [BKL]). En [H2] se prueba la desigualdad (0.0.4) para una clase más general de pesos.

En pocas palabras, nuestro primer resultado dice que la desigualdad de Poincaré mejorada (0.0.3) es válida para dominios de John si la desigualdad de Poincaré clásica

$$||\varphi||_{L^p_w(Q)} \leq C||\nabla\varphi||_{L^p_v(Q)} \tag{0.0.5}$$

vale en cubos Q , w y v son integrables en Ω y w es un peso doblante. El argumento que utilizamos para obtener esta prueba está contenido esencialmente en [C, H2, IN]. Si bien obtenemos la versión en normas con dos pesos, nos centraremos en el caso de un peso, esto es $w = v$. En este caso obtenemos varios ejemplos de pesos para los cuales vale (0.0.2), entre ellos pesos en la clase $A_p^{loc}(\Omega)$. Esta clase contiene a la clase A_p. La definición es análoga a la de A_p pero considerando cubos cuyo diámetro es menor que su distancia al borde.

Por otro lado obtenemos la desigualdad de Poincaré mejorada en $L^1_w(\Omega)$ para una subclase de pesos de $A_1^{loc}(\Omega)$. Para ello utilizamos una fórmula de representación que nos permite escribir a una función en términos de una integral que involucra a su gradiente. Esta representación se puede encontrar en [ADM]. Luego, utlizando argumentos del trabajo [DMRT] se prueba la desigualdad para estos mismos pesos pero en $L^p_w(\Omega)$.

Luego de obtener generalizaciones de la desigualdad de Poincaré mejorada con pesos analizamos su relación con una descomposición de una función f de promedio cero como suma de funciones soportadas en cubos con la misma propiedad, es decir, estudiamos si es posible escribirla como

$$f = \sum f_j$$

con

$$||f||^p_{L^p_w(\Omega)} \approx \sum ||f_j||^p_{L^p_w(\Omega)}$$

donde las f_j son funciones de integral cero y soportadas en cubos. Obtenemos que si vale la desigualdad de Poincaré mejorada en $L^{p'}_{w'}(\Omega)$ entonces vale la descomposición en $L^p_w(\Omega)$. En consecuencia obtenemos la descomposición para una clase de pesos muy general.

Esta descomposición es importante pues tiene varias aplicaciones. En este trabajo estudiamos como aplicaciones la resolubilidad de la divergencia en espacios de Sobolev con pesos y la desigualdad de Fefferman-Stein.

En [ADM] se obtuvo la resolubilidad de la divergencia en dominios de John en espacios de Sobolev. Más específicamente los autores obtienen que dada $f \in L^p(\Omega)$ existe $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \text{div } u = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \\ ||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)}. \end{cases} \tag{0.0.6}$$

Los autores dan una prueba constructiva y la solución u está dada por un operador integral actuando en f. Para probar la estimación en $W^{1,p}(\Omega)$ se utliza la teoría de integrales singulares de Calderón-Zygmund y la función maximal de Hardy-Littlewood.

Luego en [DMRT] se estudia el problema (0.0.6) para dominios generales. En este trabajo se obtiene la resolubilidad de (0.0.6) con la estimación

$$||Du||_{L^p_{\frac{d^n}{\omega}}(\Omega)} \leq C||f||_{L^p(\Omega)}$$

donde ω es un peso que depende del dominio Ω. Los autores también obtienen una descomposición para funciones de integral cero. De hecho, esto nos motivó a extender este resultado en espacios con pesos.

A partir de las ideas presentadas en [DMRT] generalizamos los resultados obtenidos allí para pesos en A_1.

Como segunda aplicación de la descomposición tenemos la desigualdad de Fefferman-Stein en espacios con pesos que no están necesariamente en A_p. En el trabajo clásico [FS] los autores estudian la caracterización de los espacios de Hardy. Para ello utilizan la desigualdad

$$||\mathcal{M}f||_{L^p} \leq C||\mathcal{M}^{\#}f||_{L^p} \tag{0.0.7}$$

donde $\mathcal{M}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood y $\mathcal{M}^{\#}$ es la maximal sharp que se introduce para definir los espacios BMO. Como consecuencia de (0.0.7) se obtiene

$$||f||_{L^p} \leq C||\mathcal{M}^{\#}f||_{L^p} \tag{0.0.8}$$

esta desigualdad es la llamada desigualdad de Fefferman-Stein. Siguiendo la demostración dada en [FS] se puede ver que la desigualdad (0.0.8) puede obtenerse en norma con pesos A_p, esto es

$$||f||_{L^p_w} \leq C||\mathcal{M}^{\#}f||_{L^p_w}. \tag{0.0.9}$$

Esta desigualdad es una herramienta fundamental para probar la continuidad de los operadores integrales singulares en L^p_w.

Luego en [DRS] se estudia una versión local de la desigualdad (0.0.9) en un dominio acotado de John. Para ello se introduce la siguiente maximal sharp

$$\mathcal{M}^{\#}_{\Omega,\sigma}f(x) = \sup_{Q:\sigma Q\subset\Omega} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|$$

donde $\sigma > 1$ y se prueba

$$||f||_{L^p_w(\Omega)} \leq C||\mathcal{M}^{\#}_{\Omega,\sigma}f||_{L^p_w(\Omega)}. \tag{0.0.10}$$

Basándonos en las ideas de [DRS] obtenemos la desigualdad anterior para pesos w en la clase $A^{loc}_\infty(\Omega)$ integrables de modo que vale la descomposición en el espacio dual $L^{p'}_{w'}(\Omega)$. La idea primero es probar la desigualdad (0.0.10) en cubos utilizando una desomposición local de Calderón-Zygmund. Con local nos referimos a la descomposición clásica pero ahora en un cubo en vez de en $\mathbb{R}^n$.

Recordemos que si vale la desigualdad de Poincaré mejorada en $L^p_w(\Omega)$ entonces vale la descomposición en $L^{p'}_{w'}(\Omega)$. Con esto obtenemos como ejemplos para los cuales vale la desigualdad de Fefferman-Stein los pesos potencia $|x|^\alpha$ con $\alpha > 0$ y $d(x)^\beta$ con $\beta > -1$.

Como ya comentamos antes, muchas desigualdades con pesos se estudian en el análisis de ecuaciones diferenciales. En la última parte de esta tesis estudiamos las estimaciones a priori en normas con pesos de soluciones de sistema de ecuaciones uniformemente elípticos. Para ejemplificar consideremos el caso del potencial newtoniano de una función regular de soporte compacto, o sea, dada f se define

$$u(x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy$$

donde para simplifiar consideramos $n \geq 3$. Con la constante c_n elegida adecuadamente u resulta ser solución de $-\Delta u = f$ en $\mathbb{R}^n$. Un resultado clásico es la validez de la siguiente estimación

$$||u||_{W^{2,p}} \leq C||f||_{L^p} \tag{0.0.11}$$

para $1 < p < \infty$. Esta estimación es una consecuencia de la continuidad de los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund.

Por otra parte en el trabajo clásico [ADN] los autores demuestran que una estimación como (0.0.11) es también válida para el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en} \quad \Omega \\ \quad u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.12}$$

donde Ω es un dominio acotado con borde suficientemente suave, donde ahora las normas se toman en los espacios definidos sobre Ω. Más aún, los autores demuestran estimaciones análogas para sistemas elípticos muy generales también utilizando la teoría de Calderón-Zygmund. En vista de los resultados de continuidad de operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund con pesos A_p surge estudiar las estimaciones a priori con pesos A_p para soluciones de problemas de contorno elípticos.

En [DST1, DST2] se obtienen resultados en esta dirección para soluciones de $-\Delta$ y $(-\Delta)^m$, es decir se obtiene la desigualdad

$$||u||_{W^{2m,p}_w(\Omega)} \leq C||f||_{L^p_w(\Omega)} \tag{0.0.13}$$

donde $m = 1$ en el caso de $-\Delta$. Las demostraciones de estos trabajos utilizan muchas estimaciones de la función de Green asociada a la ecuación (ver [K]). Sin embargo obtenemos una demostración alternativa más sencilla para cualquier operador elíptico de [ADN]. Para ello generalizamos las técnicas que se utilizan para probar la continuidad con pesos de las integrales singulares en $\mathbb{R}^n$ a un dominio acotado. La primera herramienta que utilizamos es la siguiente estimación puntual para cualquier $s > 1$

$$\mathcal{M}_{\Omega}^{\#}(Tf)(x) \leq (\mathcal{M}|f|^{s}(x))^{\frac{1}{s}}$$

donde Tf representa el operador de derivadas de la solución del mismo orden que el operador elíptico y $\mathcal{M}_{\Omega}^{\#}$ es la maximal sharp restringida a cubos contenidos en Ω. La segunda herramienta que utilizamos es la desigualdad de Fefferman-Stein (0.0.10).

Además obtenemos como depende del peso la constante de (0.0.13) y mostramos que esta constante es óptima en cierto sentido

En la línea de las estimaciones a priori (0.0.13), obtenemos estimaciones con dos pesos utilizando la continuidad de los operadores integrales singulares y el operador maximal de Hardy-Littlewood con dos pesos.

Además estudiamos el problema (0.0.12) para el caso en que f es una función radial , $\Omega = B_1(0)$ y w es un peso radial y obtenemos estimaciones a priori si el peso cumple cierta condición. Para ello calculamos explícitamente la solución y a partir de ella obtenemos la estimación a priori aplicando la desigualdad de Hardy con dos pesos. De aquí resulta la condición que debe cumplir el peso. Como caso particular, obtenemos pesos potencia que no están en A_p.

Como último resultado de esta tesis obtenemos una condición necesaria para que valgan las estimaciones a priori para el problema de Dirichlet para el operador $(-\Delta)^m$ donde $m \in \mathbb{N}$. De hecho obtenemos que si vale la estimación a priori con pesos

$$||u||_{W_w^{2m,p}(\Omega)} \leq C||f||_{L_w^p(\Omega)}$$

entonces el peso debe estar en la clase $A_p^{loc}(\Omega)$. Para obtener este resultado nos basamos en la técnica utilizada en [GCRF, S1] para obtener la condición necesaria para la continuidad de las tranformadas de Riesz y ciertos operadores integrales singulares de tipo convolución en L_w^p.

Preliminares

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $C_0^\infty(\Omega)$ el conjunto de funciones infinitamente derivables con soporte compacto en Ω. Denotamos $supp\, f$ al soporte de una función f. Consideramos

$$L^p(\Omega) := \left\{ f \text{ medibles } : ||f||_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

Para $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, decimos que v es la $\alpha-$ derivada débil de u si para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ y la derivada de orden α está dada por

$$D^\alpha_x := \partial^{\alpha_1}_{x_1} ... \partial^{\alpha_n}_{x_n}.$$

Cuando no sea necesario aclarar la dependecia de x notaremos $D^\alpha := D^\alpha_x$.

Consideraremos una descomposición de Whitney de un dominio abierto acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$(ver [S2]). Esto es existe una familia de cubos $\mathcal{W} = \{Q\}$, cuyos interiores son disjuntos, y una constante $N > 0$ tal que,

1. $\Omega = \bigcup Q = \bigcup Q^*$
2. $c_1 diam(Q) \leq dist(Q, \partial\Omega) \leq c_2 diam(Q)$
3. $\sum \chi_{Q^*} \leq N \chi_\Omega$

donde Q^* es cierto cubo expandido de Q y c_1 y c_2 son constantes de modo que c_1 puede elegirse mayor que 1. Además los cubos Q^* se pueden elegir de modo que también cumplen la propiedad 2.

Diremos que un cubo $Q \subset \Omega$ es de tipo Whitney si

$$diam(Q) \approx dist(Q, \partial\Omega).$$

De aquí en adelante usaremos la notación $A \approx B$ para indicar que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. Además C denotará una constante general que puede cambiar en una secuencia de desigualdades.

En muchos de los resultados que obtendremos en este trabajo consideraremos los llamados dominios de John.

Definición 0.0.14. Sea $s \geq 1$ un parámetro fijo. Decimos que Ω es s-John si podemos elegir un punto de referencia x_0 de modo que existe una constante C y para cada y existe una curva rectificable $\gamma(y)$ cuya imagen está contenida en Ω que conecta y con x_0 y satisface la siguiente estimación

$$d(\gamma(t,y)) \geq Ct^s. \tag{0.0.15}$$

donde $d(\gamma(t,y))$ denota la distancia del punto $\gamma(t,y)$ al borde $\partial\Omega$. Si $s = 1$ diremos simplemente que Ω es un dominio de John. Observemos que podemos parametrizar $\gamma(t,y)$ por su longitud de arco y tenemos que $\gamma(0,y) = y$ y $\gamma(l(\gamma(y)),y) = x_0$, donde $l(\gamma(y))$ denota la longitud de la curva $\gamma(y)$. Además observemos que

$$d(x_0) = d(\gamma(l(\gamma(y)),y)) \geq Cl(\gamma(y))^s$$

con los cual tenemos que las longitudes $l(\gamma(y))$ están acotadas.

En el caso en que Ω es un dominio de John uno puede elegir una descomposición de Whitney con las siguientes propiedades (ver [H1, DRS]). Existe un cubo Q_0^* (llamado cubo central) tal que puede ser conectado con cada cuboQ^* de la descomposición por una cadena finita de cubos, $Q_0^*, Q_1^*, ..., Q_s^* = Q^*$, tal que para cada $j = 0, 1, ..., s-1$

$$Q^* \subseteq NQ_j^*$$

y existe un cubo R_j tal que

$$R_j \subset Q_j^* \cap Q_{j+1}^* \text{ y } Q_j^* \cup Q_{j+1}^* \subset NR_j.$$

Un operador fundamental en el Análisis Armónico es el operador maximal de Hardy-Littlewood definido por

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\, dy \tag{0.0.16}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$ que contienen a x. Recordemos el siguiente resultado de continuidad para $\mathcal{M}$:

Teorema 0.0.17. *$\mathcal{M}$ es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p), es decir existen constantes C_1 y C_p tales que*

$$\sup_{t \geq 0} t|\{x : \mathcal{M}f(x) > t\}| \leq C_1 ||f||_{L^1}$$

$$||\mathcal{M}f||_{L^p} \leq C_p ||f||_{L^p}.$$

Otro resultado más general que vale para $\mathcal{M}$ es el siguiente

Teorema 0.0.18. *([CF, Lemma 1]) Sea μ una medida positiva en $\mathbb{R}^n$ tal que $\mu(2Q) \leq C\mu(Q)$ para todo cubo Q. Definimos la siguiente maximal*

$$\mathcal{M}_\mu f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int |f(y)|\, d\mu(y).$$

Luego

$$\int (\mathcal{M}_\mu f(x))^p \, d\mu(x) \leq C \int |f(x)|^p \, d\mu(x)$$

para todo $1 < p < \infty$.

Decimos que una funcion w es un peso, si es medible y además $w > 0$ en casi todo punto. Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ notaremos $w(E) = \int_E w(x)\, dx$. Diremos que un peso w es doblante si existe una constante C que depende sólo de w tal que $w(2Q) \leq Cw(Q)$ para todo Q cubo de $\mathbb{R}^n$. El espacio $L^p_w(\Omega)$ es el espacio de funciones medibles en Ω tales que

$$||f||_{L^p_w(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p w(x)\, dx \right)^{1/p}$$

. Definimos la norma tipo débil (p, ∞) con peso w de la siguiente manera

$$||f||_{L^{p,\infty}_w} = \sup_{t>0} tw\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}\right)^{1/p}$$

El espacio de Sobolev con pesos se define como

$$W^{k,p}_w(\Omega) := \left\{ f \in L^1_{loc} : D^\alpha f \in L^p_w(\Omega) \;\; \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k \right\}$$

con

$$||f||_{W^{k,p}_w(\Omega)} =: \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f||^p_{L^p_w(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

Definición 0.0.19. Dado un peso w definido en $\mathbb{R}^n$ diremos que $w \in A_1$ si

$$\mathcal{M}w(x) \leq Cw(x) \tag{0.0.20}$$

en casi todo punto. Por otro lado, diremos que $w \in A_p$, con $p > 1$ si se satisface

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq C \tag{0.0.21}$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. Observemos que la condición (0.0.21) es equivalente si reemplazamos cubos por bolas en $\mathbb{R}^n$. Por último definimos la clase $A_\infty := \bigcup_{p \geq 1} A_p$.

Definimos la constante A_1 como la menor constante tal que vale (0.0.20) y la notamos $[w]_{A_1}$. Definimos la constante A_p como la menor constante tal que vale 0.0.21 y la notamos $[w]_{A_p}$. Por último definimos la constante $[w]_{A_\infty} := \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q M(\chi_Q w)$

Sea p' el exponente dual de p, es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Podemos enunciar las siguientes propiedades de los pesos A_p.

Proposición 0.0.22. *1. $A_q \subset A_p$ si $q < p$.*

2. *Si $w \in A_p$ entonces $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$.*

3. *Si $w_1, w_2 \in A_1$ entonces $w_1 w_2^{p-1} \in A_p$.*

4. *Propiedad de Hölder inversa: Si $w \in A_p$ para algún $p \geq 1$, entonces existe $\varepsilon > 0$ (que depende de w) tal que para todo cubo Q*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1+\epsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)$$

5. *Si $w \in A_p$ entonces existe $\varepsilon > 0$ (que depende de w) tal que $w \in A_{p-\varepsilon}$.*

6. *Si $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $w^{1+\varepsilon} \in A_p$.*

7. *Si $f \in L^1_{loc}$,$0 \leq \delta < 1$, entonces $w(x) = (\mathcal{M}f(x))^\delta \in A_1$ con constante A_1 que depende de δ. Recíprocamente, si $w \in A_1$, entonces existen $f \in L^1_{loc}$, $0 \leq \delta < 1$ y $k \in L^\infty$ con $k^{-1} \in L^\infty$ tales que $w(x) = k(x)(\mathcal{M}f(x))^\delta$.*

La clase de pesos A_p fue introducida por Muckenhoupt en [M]. Esta clase surgió cuando el autor se propuso caracterizar los pesos para los cuales vale la continuidad de la maximal de Hardy-Littlewood en norma con pesos. De hecho tenemos el siguiente resultado

Teorema 0.0.23. *Sea $1 < p < \infty$ y w un peso. Entonces $w \in A_p$ si y sólo si existe una constante C que depende sólo de p y w tal que $||\mathcal{M}f||_{L^p_w} \leq C||f||_{L^p_w}$.*

Otros operadores de gran interés son los operadores integrales singulares y la integral fraccionaria. De hecho, fue probada la continuidad de estos operadores en $L^p_w(\Omega)$ para $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$ (ver [S3], [CF], [SW] y [MW]) . Recordemos que la integral fraccionaria se define como

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

donde $0 < \alpha < n$.

A lo largo del trabajo citaremos los siguientes resultados de continuidad en norma con pesos para estos operadores:

Teorema 0.0.24. *([Du, Theorem 7.11]) Sea T un operador integral singular tal que si $f \in C_0^\infty(\Omega)$ y $x \notin supp(f)$ está dado por*

$$Tf(x) =: \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,dy$$

con K un núcleo que satisface las siguientes propiedades

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}, \tag{0.0.25}$$

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leq C\frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \text{ si } |x-y| > 2|y-z|, \tag{0.0.26}$$

$$|K(x,y) - K(w,y)| \leq C\frac{|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}} \text{ si } |x-y| > 2|x-w|. \tag{0.0.27}$$

Entonces el operador T es continuo en $L^p_w(\Omega)$.

Teorema 0.0.28. *([SaW]) Sea $1 < p < \infty$. Sean w y v dos pesos para los cuales existe $r > 1$,*

$$|Q|^{\frac{\alpha}{n}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r\right)^{\frac{1}{pr}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{(1-p')r}\right)^{\frac{1}{p'r}} \leq C$$

entonces vale que,

$$||I_\alpha f||_{L^p_w} \leq C||f||_{L^p_v}$$

Observación 0.0.29. En particular si $w = v$ recuperamos el resultado de continuidad de la integral fraccionaria con pesos A_p.

Ahora para los operadores del Teorema 0.0.24 se estudió en numerosos trabajos cómo depende la norma en L^p_w en términos de la constante $[w]_{A_p}$. En primer lugar se estudio esto para $p = 2$. Se conjeturó el siguiente resultado

Teorema 0.0.30. *Si $w \in A_2$ entonces*

$$||T||_{L^2_w} \leq c(n,T)[w]_{A_2}.$$

Se mostró con contraejemplos sencillos en el caso de la transformada de Hilbert y las transformadas de Riesz que no puede mejorarse la potencia de $[w]_{A_2}$. Para la maximal de Hardy-Littlewood se probó el Teorema 0.0.30 en [Bu]. De hecho en este trabajo el autor prueba que si $p > 1$ entonces

$$||\mathcal{M}f||_{L^p_w} \leq C_n(p'[w]_{A_p})^{\frac{1}{p-1}}. \tag{0.0.31}$$

y

$$||\mathcal{M}f||_{L^{p,\infty}_w} \approx [w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \tag{0.0.32}$$

Luego se obtuvo el Teorema 0.0.30 para las trasformadas de Hilbert y Riesz (ver [P1] y [P2]). Finalmente Hytönen en [H] probó este resultado para los operadores de Calderón-Zygmund. Luego para $p > 1$ se obtuvo la siguiente versión para A_p usando una versión cualitativa del Teorema de Extrapolación de Rubio de Francia

Teorema 0.0.33. *Si T es un operador de Calderón-Zygmund como en el Teorema 0.0.24 entonces*

$$||Tf||_{L^p_w(\Omega)} \leq C_T[w]_{A_p}^{\max(1,\frac{1}{p-1})}||f||_{L^p_w(\Omega)}.$$

Este último teorema se demostró también para el operador maximal asociado a T, que lo notaremos T^* y se define de la siguiente manera

$$T^*f(x) := \sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)\,dy\right|.$$

Teniendo en cuenta que $[w]_{A_\infty} \leq c_n[w]_{A_p}$, en [HP] se obtienen mejoras de la constantes para el caso de $\mathcal{M}$ y T. En primer lugar se prueba que

$$||\mathcal{M}||_{L^p_w} \leq C_n p'([w]_{A_p}[w']_{A_\infty})^{\frac{1}{p}} \tag{0.0.34}$$

y por otro lado

$$||T||_{L^p_w} \leq c_n[w]_{A_p}^{\frac{1}{p}} \max([w]_{A_\infty}^{1/p}, [w']_{A_\infty}^{1/p}). \tag{0.0.35}$$

Capítulo 1

Desigualdad de Poincaré mejorada

En esta sección presentaremos condiciones suficientes para un par de pesos (w, v) para que valga la desigualdad de Poincaré mejorada

$$\|\varphi - \varphi_{\Omega,w}\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|d\nabla\varphi\|_{L^p_v(\Omega)} \tag{1.0.1}$$

donde $\varphi_{\Omega,w} = \dfrac{1}{w(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega \varphi w$ y $d(x)$ es la distancia del punto x al borde $\partial\Omega$.

1.1. Teorema General

La mayor parte de resultados de esta sección pueden encontrarse en nuestro trabajo [ACD]. Comenzamos enunciando el siguiente lema que nos será útil para el teorema general.

Lema 1.1.1. *([StW, Lemma 2.3]) Sea $\mathcal{V} = \{Q\}$ una familia arbitraria de cubos en $\mathbb{R}^n$. Si w es un peso doblante, $1 \leq p < \infty$, $N \geq 1$ y A_Q números reales no negativos, luego*

$$\left\| \sum_{Q\in\mathcal{V}} A_Q \chi_{NQ}(x) \right\|_{L^p_w} \leq C \left\| \sum_{Q\in\mathcal{V}} A_Q \chi_Q(x) \right\|_{L^p_w} \tag{1.1.2}$$

donde la constante C depende sólo de n, N, p y w.

Demostración. El caso $p = 1$ se sigue inmediatamente usando que w es doblante. Si $1 < p < \infty$ sea $\varphi \in L^{p'}_w$ y positiva, con $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_Q A_Q \chi_{NQ}(y)\varphi(y)w(y)\,dy = \sum_Q A_Q \int_{NQ} \varphi(y)w(y)\,dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\sum_Q A_Q w(Q)\frac{1}{w(NQ)}\int_{NQ}\varphi(y)w(y)\,dy\\
&= C\sum_Q A_Q\int_Q\frac{1}{w(NQ)}\int_{NQ}\varphi(y)w(y)\,dyw(x)\,dx\\
&\leq C\sum_Q A_Q\int_Q \mathcal{M}_w\varphi(x)w(x)\,dx\\
&= C\int_{\mathbb{R}^n}\sum_Q A_Q\chi_Q\mathcal{M}_w\varphi(x)w(x)\,dx\\
&\leq C\left\|\sum_Q A_Q\chi_Q\right\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}||\mathcal{M}_w\varphi||_{L^{p'}_w(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\left\|\sum_Q A_Q\chi_Q\right\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}||\varphi||_{L^{p'}_w(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

donde usamos dualidad, que w es doblante y la continuidad de $\mathcal{M}_w$ definida por

$$\mathcal{M}_w\varphi(x)=\sup_{Q\ni x}\frac{1}{w(Q)}\int_Q\varphi(y)w(y)\,dy.$$

dada en el Teorema 0.0.18. □

Ahora enunciamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.1.3. *Sea Ω un dominio acotado y de John y w y v dos pesos tal que $w\in L^1(\Omega)$ y es doblante. Además supongamos que*

$$\|\varphi-\varphi_{Q,w}\|_{L^p_w(Q)}\leq Cdiam(Q)\|\nabla\varphi\|_{L^p_v(Q)} \tag{1.1.4}$$

para toda $\varphi\in C^1(\bar{Q})$ y todo cubo $Q\subset\Omega$ de tipo Whitney, donde C es una constante que no depende del cubo. Luego, para $1\leq p<\infty$ y toda $\varphi\in C^1(\Omega)$,

$$\|\varphi-\varphi_{\Omega,w}\|_{L^p_w(\Omega)}\leq C\|d\nabla\varphi\|_{L^p_v(\Omega)}$$

donde la constante depende sólo de Ω, w, v y p.

Demostración. Sea $\mathcal{W}=\{Q\}$ una descomposición de Whitney de las que se consideran en los Preliminares para el caso de dominios de John. Observemos que

$$\text{máx}\left\{w(Q_j^*),w(Q_{j+1}^*)\right\}\leq Cw(Q_j^*\cap Q_{j+1}^*) \tag{1.1.5}$$

$j=0,1,...,s$. Como $w\in L^1(\Omega)$ es suficiente probar que

$$\|\varphi-\varphi_{Q_0^*,w}\|_{L^p_w(\Omega)}\leq C\|d\nabla\varphi\|_{L^p_v(\Omega)}$$

donde Q_0^* es el cubo central. Tenemos

$$\int_\Omega |\varphi(x) - \varphi_{Q_0^*,w}|^p w(x)\, dx$$
$$\leq 2^p \sum_{Q\in\mathcal{W}} \int_{Q^*} |\varphi(x) - \varphi_{Q^*,w}|^p w(x)\, dx + 2^p \sum_{Q\in\mathcal{W}} \int_{Q^*} |\varphi_{Q_0^*,w} - \varphi_{Q^*,w}|^p w(x)\, dx.$$

Para estimar la primer suma usamos (1.1.4) y que los cubos Q^* son de tipo Whitney,

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in\mathcal{W}} \int_{Q^*} |\varphi(x) - \varphi_{Q^*,w}|^p w(x)\, dx &\leq \sum_{Q\in\mathcal{W}} C\, diam(Q^*)^p \int_{Q^*} |\nabla\varphi(x)|^p v(x)\, dx \\ &\leq C \sum_{Q\in\mathcal{W}} \int_{Q^*} |\nabla\varphi(x)|^p d(x)^p v(x)\, dx \\ &= C \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^p d(x)^p v(x)\, dx\end{aligned}$$

donde usamos para la última desigualdad $\sum \chi_{Q^*} \leq N\chi_\Omega$.

Ahora, estimamos la segunda suma. Tenemos que

$$|\varphi_{Q_0^*,w} - \varphi_{Q^*,w}| \leq \sum_{j=0}^{s-1} |\varphi_{Q_j^*,w} - \varphi_{Q_{j+1}^*,w}| \tag{1.1.6}$$

usando nuevamente que$\sum \chi_{Q^*} \leq N\chi_\Omega$, la desigualdad triangular , (1.1.4) y que los cubos Q_j^* son de tipo Whitney, obtenemos

$$\begin{aligned}|\varphi_{Q_j^*,w} - \varphi_{Q_{j+1}^*,w}|^p &= \frac{1}{w(Q_j^* \cap Q_{j+1}^*)} \int_{Q_j^*\cap Q_{j+1}^*} |\varphi_{Q_j^*,w} - \varphi_{Q_{j+1}^*,w}|^p w(y)\, dy \\ &\leq 2^p C \sum_{\alpha=j}^{j+1} \frac{1}{w(Q_\alpha^*)} \int_{Q_\alpha^*} |\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\, dy.\end{aligned}$$

Como $Q^* \subseteq NQ_\alpha^*$ para $0 \leq \alpha \leq s$ tenemos que

$$|\varphi_{Q_j^*,w} - \varphi_{Q_{j+1}^*,w}|^p \chi_{Q^*}(x) \leq C \sum_{\alpha=j}^{j+1} \frac{\chi_{NQ_\alpha^*}(x)}{w(Q_\alpha^*)} \int_{Q_\alpha^*} |\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\, dy$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}|\varphi_{Q_0^*,w} - \varphi_{Q^*,w}|\chi_{Q^*}(x) &\leq C \sum_{j=0}^{s-1} \left(\sum_{\alpha=j}^{j+1} \frac{\chi_{NQ_\alpha^*}(x)}{w(Q_\alpha^*)} \int_{Q_\alpha^*} |\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \sum_{R\in\mathcal{W}} \chi_{NR^*}(x) \left(\frac{1}{w(R^*)} \int_{R^*} |\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

luego,

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in\mathcal{W}}\int_{Q^*}|\varphi_{Q_0^*,w}-\varphi_{Q^*,w}|^p w(x)\,dx &\le \sum_{Q\in\mathcal{W}}\int_{Q^*}|\varphi_{Q_0^*,w}-\varphi_{Q^*,w}|^p\chi_{Q^*}(x)w(x)\,dx\\ &\le C\sum_{Q\in\mathcal{W}}\int_{Q^*}\left|\sum_{R\in\mathcal{W}}\left(\frac{1}{w(R^*)}\int_{R^*}|\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\,dy\right)^{1/p}\chi_{NR^*}(x)\right|^p w(x)\,dx\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{R\in\mathcal{W}}\left(\frac{1}{w(R^*)}\int_{R^*}|\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\chi_{NR^*}(x)\right|^p w(x)\,dx\end{aligned}$$

usando ahora (1.1.2) y $\sum_{R\in\mathcal{W}}\chi_{R^*}(x)\le N\chi_\Omega(x)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}&\sum_{Q\in\mathcal{W}}\int_{Q^*}|\varphi_{Q_0^*,w}-\varphi_{Q^*,w}|^p w(x)\,dx\\ &\qquad\le C\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{R\in\mathcal{W}}\left(\frac{1}{w(R^*)}\int_{R^*}|\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\chi_{R^*}(x)\right|^p w(x)\,dx\\ &\qquad\le C\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{R\in\mathcal{W}}\left(\frac{1}{w(R^*)}\int_{R^*}|\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\,dy\right)\chi_{R^*}(x)w(x)\,dx\\ &\qquad= C\sum_{R\in\mathcal{W}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{w(R^*)}\chi_{R^*}(x)w(x)\,dx\int_{R^*}|\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\,dy\\ &\qquad= C\sum_{R\in\mathcal{W}}\int_{R^*}|\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\,dy\le C\int_\Omega|\nabla\varphi(y)|^p d(y)^p v(y)\,dy\end{aligned}$$

concluyendo la prueba. □

Observación 1.1.8. Se puede ver en la demostración que la condición w doblante puede reemplazarse por doblante en cubos de Whitney.

Como consecuencia obtenemos la siguiente versión con un peso

Teorema 1.1.9. *Sea Ω un dominio acotado y de John y w un peso tal que $w\in L^1(\Omega)$, doblante y*

$$\|\varphi-\varphi_{Q,w}\|_{L^p_w(Q)}\le C diam(Q)\|\nabla\varphi\|_{L^p_w(Q)} \tag{1.1.10}$$

para toda $\varphi\in C^1(\bar{Q})$ y todo cubo $Q\subset\Omega$ de tipo Whitney, donde C es una constante que no depende del cubo. Luego, para $1\le p<\infty$ y toda $\varphi\in C^1(\Omega)$,

$$\|\varphi-\varphi_{\Omega,w}\|_{L^p_w(\Omega)}\le C\|d\nabla\varphi\|_{L^p_w(\Omega)}$$

donde la constante depende sólo de Ω, w y p.

1.2. Ejemplos

Ejemplo 1.2.1. Como ejemplo del Teorema 1.1.3 se tiene los pares de pesos $(w,v)\in\mathcal{A}_p$, es decir

$$[w,v]_{\mathcal{A}_p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} < \infty$$

para todo cubo Q.

Para ver esto, notemos que en el Teorema 2 de [Ha] se prueba que el tipo débil implica el fuerte, i.e, si μ y ν son dos medidas positivas de Borel y ν absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, entonces para todo $0 < p < \infty$ las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Para cada función de Lipschitz φ con soporte compacto en Ω
$$\sup_{t>0} \mu(\{|\varphi| > t\})t^p \leq C_1 \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p \, d\nu\right)$$

2. Para cada función Lipschitz φ con soporte compacto en Ω
$$\int_\Omega |\varphi|^p \, d\mu \leq C_2 \int_\Omega |\nabla\varphi|^p \, d\nu.$$

En nuestro caso $\nu = v(x)\,dx$, $\mu = w(x)\,dx$ y $\Omega = Q$. Tenemos que

$$|\varphi - \varphi_Q| \leq I_1(|\nabla\varphi|\chi_Q)(x) \leq diam(Q)\mathcal{M}(|\nabla\varphi|\chi_Q)(x)$$

luego se sigue que

$$||\varphi - \varphi_Q||_{L^{p,\infty}_w(Q)} \leq diam(Q)||\mathcal{M}(|\nabla\varphi|\chi_Q)||_{L^{p,\infty}_w(Q)} \leq diam(Q)[w,v]_{A_p}^{\frac{1}{p}}||\nabla\varphi||_{L^p_v(Q)}$$

donde usamos que $||\mathcal{M}||_{L^{p,\infty}_{v,w}} \approx [w,v]_{A_p}^{\frac{1}{p}}$ (ver [Jo]). Por la equivalencia anterior tenemos que

$$||\varphi - \varphi_Q||_{L^p_w(Q)} \leq C_n diam(Q)[w,v]_{A_p}^{\frac{1}{p}}||\nabla\varphi||_{L^p_v(Q)}.$$

Con lo cual tenemos la desigualdad en cubos para aplicar el Teorema 1.1.3.

Observación 1.2.2. Se sabe que (1.1.10) vale para pesos A_p (esto fue probado en [FKS]). Más aún en ([C],Theorem 2.14) Chua da una condición suficiente más general. De hecho, el autor prueba que (1.1.10) vale para cualquier peso doblante w que satisface la siguiente condición : existe $r > 1$ tal que para todo cubo $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$,

$$\sup_{Q\subset Q_0} |Q|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r\right)^{\frac{1}{pr}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{-r}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p'r}} < \infty.$$

El autor no provee una expresión explicita para la constante en (1.1.10) pero puede ser obtenida usando un argumento de reescale estándar.

1.2.1. Pesos $A_p^{loc}(\Omega)$

Así como se ha estudiado la clase de pesos A_p también se introdujo una clase más general de pesos que contiene a dicha clase. Dado un dominio abierto Ω definimos la clase $A_p^{loc}(\Omega)$ de la siguiente manera. En primer lugar, si $\beta < 1$ diremos que $w \in A_p^{loc,\beta}(\Omega)$ para $1 < p < \infty$ si

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C \tag{1.2.3}$$

para todo cubo Q tal que $diam(Q) < \beta dist(Q, \partial\Omega)$. En [HSV] se prueba que las clases $A_p^{loc,\beta}(\Omega)$ son independientes de β. En vista de esto, denotaremos $A_p^{loc}(\Omega)$ a la clase de pesos que cumplen la condición anterior para algún $\beta < 1$. A los cubos Q tales que existe una constante $\beta < 1$ tal que $diam(Q) < \beta dist(Q, \partial\Omega)$ los llamaremos admisibles.

Diremos que $w \in A_1^{loc}(\Omega)$ si $\mathcal{M}_{\Omega,loc} w(x) \leq Cw(x)$, en casi todo punto $x \in \Omega$, donde definimos

$$\mathcal{M}_{loc,\Omega} w(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\, dy$$

donde el supremo se toma sobre todo cubo Q admisible.

Por último, se define la clase $A_\infty^{loc}(\Omega) := \bigcup_{p\geq 1} A_p^{loc}(\Omega)$.

Observación 1.2.4. En la definición podemos considerar bolas admisibles en vez de cubos, es decir bolas B tal que para algún $\beta < 1$ se tiene que $2r < \beta dist(B, \partial\Omega)$, donde r es el radio de B. En algunas ocasiones consideraremos por simplicidad bolas en vez de cubos.

Se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.2.5. *Sea w un peso. Entonces $w \in A_p^{loc}(\Omega)$ si y sólo si*

$$(f_Q)^p \leq \frac{C}{w(Q)}\int_Q f^p w\, dx \tag{1.2.6}$$

para toda f no negativa y todo cubo Q tal que $diam(Q) \leq \beta dist(Q, \partial\Omega)$ para $\beta < 1$ fijo.

Demostración. Para ver esto, asumamos primero que $w \in A_p^{loc}(\Omega)$, luego

$$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\, dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q f w^{\frac{1}{p}} w^{-\frac{1}{p}}. \tag{1.2.7}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes p y p' se sigue que

$$(f_Q)^p \leq |Q|^{-p}\left(\int_Q f^p w\right)\left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq \frac{C}{w(Q)}\int_Q f^p w. \tag{1.2.8}$$

Por otro lado supongamos que vale (1.2.6). Consideremos $f = w^{-\frac{1}{p-1}}$, luego $f^p w = w^{-\frac{1}{p-1}}$. Si $\displaystyle\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}$ es finito se sigue inmediatamente la condición $A_p^{loc}(\Omega)$. En caso contrario, reemplazamos f por $(w+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}}$ para $\varepsilon > 0$. Como

$$\int_Q (w+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}} = \int_Q (w+\varepsilon)^{-1-\frac{1}{p-1}}(w+\varepsilon) \leq \int_Q (w+\varepsilon)^{-\frac{1}{p-1}} w < \infty$$

entonces

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w+\varepsilon)^{-1-\frac{1}{p-1}} w\right)^{p-1} \leq C$$

tomando límite para $\varepsilon \to 0$ concluimos que $w \in A_p$. □

Estos pesos heredan todas las propiedades de los pesos A_p que hemos enunciado en la Proposición 0.0.22. Se probó en [HSV] que $\mathcal{M}_{loc,\Omega}$ es continua en $L^p_w(\Omega)$ si y sólo si $w \in A_p^{loc}(\Omega)$, con $1 < p < \infty$. Una pregunta natural es si se podrán extender las desigualdades clásicas del Análisis Armónico para estos pesos. Pero está extensión no es válida, por ejemplo no es cierto que vale la desigualdad de Poincaré mejorada con estos pesos. Consideremos $w(x) = d(x)^\alpha$ y Ω un dominio abierto y acotado que contiene al origen entonces $w \in A_p^{loc}(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ (lo probaremos en el ejemplo 1.2.17). Ahora tomando φ igual a uno en un entorno de 0 se tiene que no existe una constante C para la cual la desigualdad

$$||\varphi||_{L^p_w(\Omega)} \leq C||d\nabla\varphi||_{L^p_w(\Omega)}$$

sea válida si $\alpha < -n$. En efecto, el lado derecho es finito, mientras que el lado izquierdo no.

Sin embargo veremos que si además requerimos que el peso sea integrable en Ω se tiene la desigualdad de Poincaré mejorada (1.0.1). Observemos que si $w \in A_p^{loc}(\Omega)$ entonces es doblante en cubos admisibles. Con lo cual bastará estudiar la desigualdad (1.1.10) para aplicar el Teorema 1.1.9. Para ello, necesitamos extender un peso en $A_p^{loc}(\Omega)$ a todo $\mathbb{R}^n$ de modo que la extensión pertenezca a la clase A_p y así poder utilazar la teoría conocida para esta clase de pesos. Vale destacar que el Teorema 1.1.9 vale si pedimos que w sea doblante y la desigualdad (1.1.10) en ambos casos considerando cubos admisibles, sólo basta observar que la descomposición de Whitney puede elegirse de modo que los cubos y sus expandidos sean admisibles.

Lema 1.2.9. *Sea $w \in A_p^{loc}(\Omega)$, con $1 < p < \infty$ y Ω un dominio acotado. Fijado un cubo $Q \subset \Omega$ admisible existe un peso $\bar{w}$ tal que $\bar{w}|_Q = w$ y $\bar{w} \in A_p(\mathbb{R}^n)$ y $[\bar{w}]_{A_p} \leq c_n[w]_{A_p^{loc}(\Omega)}$, donde c_n es una constante que depende sólo de la dimensión.*

Demostración. Fijado w y Q, sin perdida de generalidad podemos asumir que el vértice mas bajo izquierdo de Q es el origen. Sea $\tilde{Q}$ el cubo centrado en el origen de lado $2l(Q)$.

Definimos $\bar{w} = w$ en Q. Extendemos $\bar{w}$ a $\tilde{Q}$ simétricamente con respecto a los ejes coordenados y al origen. Finalmente extendemos $\bar{w}$ a todo $\mathbb{R}^n$ periodicamente con período $2l(Q)$ en cada variable.

Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un cubo, debemos probar que

$$\left(\frac{1}{|W|}\int_W \bar{w}\right)\left(\frac{1}{|W|}\int_W \bar{w}^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C \tag{1.2.10}$$

donde la constante no depende del cubo. Separamos en dos casos $|W| \geq |Q|$ y $|W| < |Q|$.

Si $|W| \geq |Q|$, entonces W está en a lo más $N = \left(\frac{2l(W)}{l(Q)}\right)^n$ cubos trasladados de Q, con lo cual

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|W|}\int_W \bar{w}\right)\left(\frac{1}{|W|}\int_W \bar{w}^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} &\leq \frac{N^p}{|W|^p}\left(\int_Q w\right)\left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \\
&\leq \frac{1}{|W|^p}\left(\frac{2l(W)}{l(Q)}\right)^{np}\left(\int_Q w\right)\left(\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \\
&\leq c_n\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C
\end{aligned}$$

Si $|W| < |Q|$, entonces $W \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i$, donde los Q_i son cubos trasladados de Q y $N \leq 2^n$. Sea Q_{i_0} tal que $|W \cap Q_{i_0}| \geq c_n|Q_{i_0}|$, luego por definición de $\bar{w}$ se tiene que

$$\int_{W\cap Q_i} \bar{w} \leq 2^n \int_{W\cap Q_{i_0}} \bar{w}$$

$$\int_{W\cap Q_i} \bar{w}^{-\frac{1}{p-1}} \leq 2^n \int_{W\cap Q_{i_0}} \bar{w}^{-\frac{1}{p-1}}$$

entonces

$$\frac{1}{|W|^p}\left(\int_W \bar{w}\right)\left(\int_W \bar{w}^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq c_n\left(\int_{W\cap Q_{i_0}} \bar{w}\right)\left(\int_{W\cap Q_{i_0}} \bar{w}^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}.$$

Ahora, sea K un cubo tal que $l(K) = l(W)$ tal que $W \cap Q_{i_0} \subset K \subset Q_{i_0}$, luego tenemos que

$$\frac{1}{|W|^p}\left(\int_W \bar{w}\right)\left(\int_W \bar{w}^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq c_n\left(\frac{1}{|K|}\int_K \bar{w}\right)\left(\frac{1}{|K|}\int_K \bar{w}^{-\frac{1}{p-1}}\right).$$

Notemos que algún trasladado de K está contenido en Q con lo cual usando la definición de $\bar{w}$ y que $w \in A_p^{loc}(\Omega)$ tenemos lo que queríamos probar. $\square$

Lema 1.2.11. *Sea $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$ y Q_0 cubo unitario. Entonces vale la desigualdad 1.1.10 con la siguiente constante*

$$||\varphi - \varphi_{Q_0,w}||_{L^p_w(Q_0)} \leq C_{np}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} ||\nabla\varphi||_{L^p_w(Q_0)} \tag{1.2.12}$$

donde C_{np} es una constante que depende sólo de p y n.

Demostración. Podemos suponer que $\varphi_{Q_0,w} = 0$. Se tiene que $diam(Q_0) = \sqrt{n}$, entonces

$$|\varphi(y)| \leq C_n \int_{|x-y|\leq\sqrt{n}} \frac{\nabla\varphi(x)}{|x-y|^{n-1}}\, dx$$

luego aplicando el argumento clásico de las coronas

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|\leq\sqrt{n}} \frac{|\nabla\varphi(x)|}{|x-y|^{n-1}}\, dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-(k+1)}\sqrt{n}\leq|x-y|\leq 2^{-k}\sqrt{n}} \frac{|\nabla\varphi(x)|}{|x-y|^{n-1}}\, dx \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} C_n 2^{-k} 2^{1-n} \frac{1}{(\sqrt{n}2^{-k})^n} \int_{|x-y|\leq 2^{-k}\sqrt{n}} |\nabla\varphi(x)|\, dx \\
&\leq C_n \mathcal{M}(|\nabla\varphi(y)|).
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$||\varphi||_{L^p_w(Q_0)} \leq C_{np}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} ||\nabla\varphi||_{L^p_w(Q_0)}$$

donde usamos que $||\mathcal{M}||_{L^p_w} \leq C_{np}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$ (ver desigualdad 0.0.31). □

Observación 1.2.13. Usando la mejora 0.0.34 se puede mejorar la constante de la desigualdad anterior de la siguiente manera

$$||\varphi - \varphi_{Q_0,w}||_{L^p_w(Q_0)} \leq C_{np}([w]_{A_p}[w']_{A_\infty})^{\frac{1}{p}} ||\nabla\varphi||_{L^p_w(Q_0)}.$$

Corolario 1.2.14. *Sea Q un cubo y $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$ entonces vale la desigualdad 1.1.10*

$$||\varphi - \varphi_{Q,w}||_{L^p_w(Q)} \leq C_{np} diam(Q)[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} ||\nabla\varphi||_{L^p_w(Q)}$$

donde C_{np} es una constante que depende sólo de p y n.

Demostración. Consideremos Q_0 cubo unitario de modo que $Q = \lambda Q_0$, donde $\lambda = l(Q)$. Entonces si $x \in Q$ tenemos que $x = \lambda y$, con $y \in Q_0$. Luego con este cambio de variables,

$$\begin{aligned}
\int_Q |\varphi(x) - \varphi_{Q,w}|^p w(x)\, dx &= \int_{Q_0} |\varphi(\lambda y) - \varphi_{Q,w}|^p \lambda^n w(\lambda y)\, dy \\
&= \int_{Q_0} |\varphi_\lambda(y) - \varphi_{Q,w}|^p \lambda^n w_\lambda(y)\, dy
\end{aligned}$$

donde $\varphi_\lambda(y) = \varphi(\lambda y)$ y $w_\lambda(y) = w(\lambda y)$. En primer lugar veamos que $w_\lambda \in A_p$. Sea $W \subset \mathbb{R}^n$ un cubo, luego

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|W|}\int_W w_\lambda(y)\right)\left(\frac{1}{|W|}\int_W w_\lambda^{-\frac{1}{p-1}}(y)\right)^{p-1} &= \left(\frac{1}{|W|}\int_{\lambda W} w(x)\lambda^{-n}\right)\left(\frac{1}{|W|}\int_{\lambda W} w^{-\frac{1}{p-1}}\lambda^{-n}\right)^{p-1}\\ &= \left(\frac{1}{|\lambda W|}\int_{\lambda W} w(x)\right)\left(\frac{1}{|\lambda W|}\int_{\lambda W} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}\end{aligned}$$

como $w \in A_p$ se tiene que $w_\lambda \in A_p$ y $[w_\lambda]_{A_p} = [w]_{A_p}$. Entonces usando el lema anterior

$$\begin{aligned}\lambda^n \int_{Q_0} |\varphi_\lambda(y) - \varphi_{Q,w}|^p w_\lambda(y)\,dy &\leq \lambda^n C_{np}[w_\lambda]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \int_{Q_0} |\nabla\varphi_\lambda(y)|^p\,dy\\ &= C_{np}[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}\lambda^p \int_Q |\nabla\varphi(x)|^p w(x)\,dx\\ &= C_{np} diam(Q)^p [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \int_Q |\nabla\varphi(x)|^p w(x)\,dx\end{aligned}$$

□

Ahora utilizando los resultados anteriores tenemos el siguiente

Teorema 1.2.15. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de John. Sea $w \in A_p^{loc}(\Omega)$ y $w \in L^1(\Omega)$, entonces vale la desigualdad de Poincaré mejorada (1.0.1).*

Demostración. Vamos a aplicar el Teorema 1.1.9. Recordemos que w es doblante en cubos admisibles por estar en $A_p^{loc}(\Omega)$. Fijamos un cubo Q admisible y sea $\bar{w}$ como en el Lema 1.2.9, luego vale la desigualdad

$$||\varphi - \varphi_{Q,\bar{w}}||_{L^p_{\bar{w}}(Q)} \leq C_{np}[\bar{w}]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} diam(Q)||\nabla\varphi||_{L^p_{\bar{w}}(Q)}.$$

Usando que $\bar{w} = w$ en Q y que $[\bar{w}]_{A_p} \leq c_n[w]_{A_p^{loc}(\Omega)}$, tenemos (1.1.10). □

Observación 1.2.16. Se puede ver probando primero el tipo débil que la constante se puede mejorar, en el sentido del exponente. Según el Ejemplo 1.2.1 considerando $w = v$ tenemos que

$$||\varphi - \varphi_Q||_{L^p_w(Q)} \leq C_n diam(Q)[w]_{A_p}^{\frac{1}{p}}||\nabla\varphi||_{L^p_w(Q)}.$$

donde usamos la equivalencia de la norma (0.0.32).

Ejemplo 1.2.17. Si consideramos $w(x) = d(x)^\alpha$ entonces este peso pertenece a $A_p^{loc}(\Omega)$ para todo α. En efecto, si Q es un cubo tal que $diam(Q) < \gamma dist(Q, \partial\Omega)$, se tiene que si $x, y \in Q$ entonces $d(y) < (\gamma+1)d(x)$ y $d(x) < (\gamma+1)d(y)$. Con lo cual

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(y)^\alpha\,dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q d(y)^{-\frac{\alpha}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C.$$

Por otro lado w debe ser integrable y por lo tanto $\alpha > -1$.

1.2.2. Otros ejemplos con un peso

La idea de esta sección es dar algunos ejemplos de pesos que satisfacen las condiciones del Teorema 1.1.9. Generalmente, no resulta fácil encontrar ejemplos de pesos que no estén en la clase A_p que satisfacen las condiciones del Teorema 1.1.9.

Ejemplo 1.2.18. Consideremos pesos de la siguiente forma

$$w(x) = (1+|x|)^{\delta} \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{|x-a_i|}{1+|x-a_i|}\right]^{\gamma_i} v(x) \tag{1.2.19}$$

donde $\delta \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$, $\{a_i\}_{i=1}^m$ son puntos en $\mathbb{R}^n$, $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, y $v \in A_p$. Estos pesos pertenecen a A_∞ (ver [StW]) pero, en general, no pertenecen a A_p. Además fue probado en [CW] que satisfacen la desigualdad (1.1.10).

Ejemplo 1.2.20. Sea Γ un subconjunto cerrado de $\partial\Omega$ y $d_\Gamma(x)$ la distancia de x a Γ. Definimos $w(x) = d_\Gamma(x)^\alpha$, para $\alpha > 0$. Es fácil probar la desigualdad (1.1.10) utilizando la desigualdad de Poincaré clásica sin pesos. De hecho, si Q es un cubo de tipo Whitney tenemos que, para $x, y \in Q$,

$$d_\Gamma(y) \leq |x-y| + d_\Gamma(x) \leq diam(Q) + d_\Gamma(x) \approx d(x) + d_\Gamma(x) \leq C d_\Gamma(x),$$

y entonces w se comporta como constante en Q.

Una aplicación interesante se obtiene considerando un dominio de John acotado Ω tal que $0 \in \Omega$. Consideremos $\tilde{\Omega} := \Omega \setminus \{0\}$ y w como antes con $\Gamma = \{0\}$, tenemos que $d_\Gamma(x) = |x|$. Luego, w está en $L^1(\tilde{\Omega})$ y es doblante. Por lo tanto, aplicando el Teorema 1.1.9 en $\tilde{\Omega}$ obtenemos, para $1 \leq p < \infty$,

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\varphi(x) - \varphi_{\tilde{\Omega},|x|^\alpha}|^p |x|^\alpha \, dx \leq C \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla\varphi(x)|^p |x|^\alpha dist(x, \partial\tilde{\Omega})^p \, dx$$

pero podemos reemplazar $\tilde{\Omega}$ por Ω en las integrales de arriba, y usando que $dist(x, \partial\tilde{\Omega}) \leq d(x)$, obtenemos

$$\|\varphi - \varphi_{\Omega,|x|^\alpha}\|_{L^p_{|x|^\alpha}(\Omega)} \leq C \|d\nabla\varphi\|_{L^p_{|x|^\alpha}(\Omega)}. \tag{1.2.21}$$

Luego usaremos esta desigualdad para $\alpha > -n$ (el caso $-n < \alpha \leq 0$ es conocido dado que para estos valores de α el peso $|x|^\alpha$ está en A_p).

Ejemplo 1.2.22. La desigualdad de Poincaré con pesos (1.2.21) en bolas fue probada para $p = 2$ y $n \geq 3$ por Fabes, Kenig y Serapioni en [FKS] utilizando un argumento diferente. De hecho, los autores prueban en este trabajo que el peso $w(x) = |x|^\alpha$, para $\alpha > 0$, pertenece a una clase general de pesos introducida en dicho trabajo, para la cual vale la desigualdad de Poincaré con pesos en bolas (como muestra este ejemplo, estos pesos no están necesariamente en A_p). Se puede reemplazar bolas por cubos en la desigualdad que obtienen los autores y consecuentemente aplicar este resultado para obtener el Teorema 1.1.9 para la clase introducida en [FKS].

En esta tesis extendemos los resultados obtenidos en esta línea para cualquier $n \geq 2$ y $p < n$. El argumento que utilizamos para obtener esta extensión es más simple dado que sólo estamos interesados en obtener la desigualdad de Poincaré mientras que en [FKS] los autores prueban desigualdades de tipo Sobolev-Poincaré.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación cuasi-conforme, esto es, f es un homeomorfismo, las componentes f_i de f tienen derivadas distribucionales en $L^n(\Omega)$, y existe una constante $M > 0$ tal que, en casi todo punto,

$$|Df(x)| := \left(\sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq MJf(x)^{\frac{1}{n}} \tag{1.2.23}$$

donde Df es la matriz formada por las derivadas de f y Jf es el valor absoluto del determinante de Df.

Lema 1.2.24. *Dado p tal que $1 \leq p < n$, definimos $w(x) = Jf(x)^{1-\frac{p}{n}}$. Existe una constante C tal que para todo cubo Q y toda $\varphi \in C^1(\bar{Q})$*

$$\|\varphi - \varphi_{Q,w}\|_{L^p_w(Q)} \leq C diam(Q) \|\nabla \varphi\|_{L^p_w(Q)} \tag{1.2.25}$$

Demostración. Como $w \in L^1(\Omega)$ es suficiente probar la desigualdad (1.2.25) reemplazando $\varphi_{Q,w}$ por una constante c_Q. La idea principal de la prueba es reducir la desigualdad de Poincaré con pesos a la desigualdad de Poincaré sin pesos vía el cambio de variables $y = f(x)$.

Observemos que

$$diam(Q) = C|Q|^{\frac{1}{n}} = C \left(\int_Q dx \right)^{1/n} = C \left(\int_{f(Q)} Jf^{-1}(y)\, dy \right)^{1/n}.$$

Luego, usando la desigualdad de Hölder con exponentes $\frac{n}{n-p}$ y su dual $\frac{n}{p}$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \int_Q |\varphi(x) - c_Q|^p w(x)\, dx &= \int_{f(Q)} |(\varphi \circ f^{-1})(y) - c_Q|^p Jf^{-1}(y)^{\frac{p}{n}}\, dy \\ &\leq \left(\int_{f(Q)} |(\varphi \circ f^{-1})(y) - c_Q|^{p*}\, dy \right)^{\frac{p}{p*}} \left(\int_{f(Q)} Jf^{-1}(y)\, dy \right)^{\frac{p}{n}} \\ &\leq C diam(Q)^p \left(\int_{f(Q)} |(\varphi \circ f^{-1})(y) - c_Q|^{p*}\, dy \right)^{\frac{p}{p*}} \end{aligned}$$

donde usamos la notación estándar para el exponente de Sobolev-Poincaré $p* = \frac{pn}{n-p}$.

Ahora, se sigue de la condición (1.2.23) para f^{-1}, que

$$\int_{f(Q)} |\nabla(\varphi \circ f^{-1})(y)|^p\, dy \leq C \int_Q |\nabla \varphi(x)|^p w(x)\, dx$$

y por lo tanto, es suficiente probar

$$\left(\int_{f(Q)} |(\varphi \circ f^{-1})(y) - c_Q|^{p*}\, dy \right)^{\frac{1}{p*}} \leq C \left(\int_{f(Q)} |\nabla(\varphi \circ f^{-1})(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2.26}$$

Pero $f(Q)$ es un dominio de John, y la desigualdad de Sobolev-Poincaré (1.2.26) para este tipo de dominios fue probada en [B]. Más aún, la constante C en (1.2.26) depende sólo de n y de la constante de John de $f(Q)$ (esto está probado, por ejemplo, en [DD]) con lo cual, de acuerdo al Lema 2.3 en [HK, Page 539], depende sólo de n y la constante A_∞ de Jf. Finalmente, fue probado en [G] que la constante A_∞ de Jf depende sólo de M y n (para esta última observación recordemos que estamos asumiendo que f es cuasi-conforme en $\mathbb{R}^n$). □

Consecuentemente obtenemos el siguiente resultado

Teorema 1.2.27. *Sea Ω un dominio acotado y de John y $w(x) = Jf(x)^{1-\frac{p}{n}}$, $1 \leq p < n$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación cuasi-conforme. Luego vale la siguiente desigualdad*

$$\|\varphi - \varphi_{\Omega,w}\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|d|\nabla\varphi|\|_{L^p_w(\Omega)}$$

Demostración. Se sabe de los resultados de [G] que $w \in A_\infty$, y por lo tanto, w es doblante. Además por (1.2.25), podemos aplicar el Teorema 1.1.9 y obtener el resultado buscado. □

Observación 1.2.28. Siguiendo el trabajo [FKS], dado $\beta > -1$, podemos considerar $f(x) = |x|^\beta x$ Sea α tal que $\beta = \frac{\alpha}{n-p}$. Obtenemos (1.2.21) con $1 \leq p < n$ (para más detalles ver [FKS]).

Queremos generalizar el Teorema 1.2.27 al caso $p > n$. Para esto necesitamos el siguiente lema.

Lema 1.2.29. *Sea $1 \leq p < \infty$. Luego la desigualdad de Poincaré mejorada en $L^p_w(\Omega)$ vale si y sólo si existe una constante $C > 0$ con la siguiente propiedad: para todos los subconjuntos medibles $E \subset \Omega$ con $w(E) \geq \frac{1}{2}w(\Omega)$ y para toda $\varphi \in L^p_w(\Omega)$ que se anula en E se tiene*

$$||\varphi||_{L^p_w(\Omega)} \leq c||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}$$

Demostración. Sea $E \subseteq \Omega$, y $\varphi \in W^{1,p}_w(\Omega)$ tal que se anula en E y $w(E) \geq \frac{1}{2}w(\Omega)$. Queremos ver que

$$||\varphi||_{L^p_w(\Omega)} \leq C||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}$$

.

$$\begin{aligned} w(E)|\varphi_{\Omega,w}|^p = \int_E |\varphi(x) - \varphi_{\Omega,w}|^p w(x)\,dx &\leq \int_\Omega |\varphi(x) - \varphi_{\Omega,w}|^p w(x)\,dx \\ &\leq C\int_\Omega d(x)|\nabla\varphi(x)|^p w(x)\,dx \end{aligned}$$

con lo cual

$$|\varphi_{\Omega,w}| \leq C\left(\frac{1}{w(E)}\right)^{\frac{1}{p}} ||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}$$

luego

$$\begin{aligned}
||\varphi||_{L^p_w(\Omega)} &\leq ||\varphi-\varphi_{\Omega,w}||_{L^p_w(\Omega)}+|\varphi_{\Omega,w}|w(\Omega)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(C+Cdiam(E)\left(\frac{w(\Omega)}{w(E)}\right)^{\frac{1}{p}}\right)||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}\\
&\leq C||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $\varphi\in L^p_w(\Omega)$. Queremos probar la desigualdad de Poincaré mejorada.

Sea

$$\mu(t):=w\left(\{x\in\Omega,\varphi(x)\leq t\}\right)$$

μ es no decreciente, continua a derecha y satisface

$$\lim_{t\to-\infty}\mu(t)=0 \text{ y } \lim_{t\to\infty}\mu(t)=w(\Omega).$$

Por el teorema de Bolzano existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que si definimos $E_\lambda:=\{x\in\Omega,\varphi(x)\geq\lambda\}$ y $F_\lambda:=\{x\in\Omega:\varphi(x)\leq\lambda\}$ se tiene que $w(E_\lambda)=\frac{1}{2}w(\Omega)$ y $w(F_\lambda)=\frac{1}{2}w(\Omega)$ Tenemos que $(\varphi-\lambda)_+\in L^p_w(\Omega)$. Como $(\varphi-\lambda)_+|_{F_\lambda}=0$ tenemos que

$$||(\varphi-\lambda)_+||_{L^p_w(\Omega)}\leq C||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}.$$

Análogamente, como $(\varphi-\lambda)_-|_{E_\lambda}=0$

$$||(\varphi-\lambda)_-||_{L^p_w(\Omega)}\leq C||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}$$

y entonces obtenemos

$$||(\varphi-\lambda)||_{L^p_w(\Omega)}\leq C||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}.$$

Ahora,

$$||\varphi-\varphi_{\Omega,w}||_{L^p_w(\Omega)}\leq||\varphi-\lambda||_{L^p_w(\Omega)}+||\lambda-\varphi_{\Omega,w}||_{L^p_w(\Omega)}\leq C||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}+||\lambda-\varphi_{\Omega,w}||_{L^p_w(\Omega)}.$$

Entonces basta probar que $||\lambda-\varphi_{\Omega,w}||_{L^p_w(\Omega)}\leq C||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}$,

$$\begin{aligned}
||\lambda-\varphi_{\Omega,w}||_{L^p_w(\Omega)}=w(\Omega)^{\frac{1}{p}}|\lambda-\varphi_{\Omega,w}| &\leq w(\Omega)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{w(\Omega)}\int_\Omega|\varphi-\lambda|w\,dx\right)\\
&\leq w(\Omega)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{w(\Omega)}\int_\Omega|\varphi-\lambda|^pw\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}
\end{aligned}$$

y entonces obtenemos la desigualdad deseada. □

Usando el lema anterior también obtenemos tenemos el siguiente resultado

Teorema 1.2.30. *Sea $p_0 < n$, $p \geq n$ y $w(x) = Jf(x)^{1-\frac{p_0}{n}}$, donde f es una aplicación cuasi-conforme. Luego tenemos que*

$$\int_\Omega |\varphi(x) - \varphi_{\Omega,w}|^p w(x)\,dx \leq C \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^p w(x)\,dx$$

Demostración. Por el lema 1.2.29 basta probar que para cada φ que se anula en $E \subseteq \Omega$ con $w(E) \geq \frac{1}{2} w(\Omega)$ tenemos $||\varphi||_{L^p_w(\Omega)} \leq C||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varphi(x)|^p Jf(x)^{1-\frac{p_0}{n}}\,dx &= \int_\Omega \left(|\varphi(x)|^{\frac{p}{p_0}}\right)^{p_0} Jf(x)^{1-\frac{p_0}{n}}\,dx \\
&\leq C \int_\Omega |d(x)\nabla\varphi^{\frac{p}{p_0}}(x)|^{p_0} Jf(x)^{1-\frac{p_0}{n}}\,dx \\
&\leq C \int_\Omega |\varphi(x)|^{p-p_0} |d(x)\nabla\varphi(x)|^{p_0} |Jf(x)|^{1-\frac{p_0}{n}}\,dx \\
&\leq C \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^p Jf(x)^{1-\frac{p_0}{n}}\,dx\right)^{\frac{p-p_0}{p}} \left(\int_\Omega |d\nabla\varphi(x)|^p Jf(x)^{1-\frac{p_0}{n}}\right)^{\frac{p_0}{p}}
\end{aligned}$$

donde usamos que la desigualdad de Poincaré vale para $|\varphi|^{\frac{p}{p_0}}$ en $L^{p_0}_w(\Omega)$ por el teorema 1.2.24 y que dado que $|\varphi|^{\frac{p}{p_0}}$ se anula en E podemos aplicar el lema anterior. $\square$

1.2.3. Pesos $A_1^{loc}(\Omega)$

En esta sección veremos que para una sublcase de pesos en $A_1^{loc}(\Omega)$ vale la desigualdad de Poincaré mejorada en el espacio $L^1_w(\Omega)$, donde Ω es un dominio acotado de John. Luego veremos que si vale esta desigualdad en $L^1_w(\Omega)$ entonces vale la desigualdad de Poincaré mejorada en el espacio $L^p_w(\Omega)$ basándonos en los argumentos del trabajo [DMRT].

Teorema 1.2.31. *Sea $w \in A_1^{loc}(\Omega)$ y $w \in L^1(\Omega)$. Si para cada par de constantes c_1, c_2 existe una constante c_3 que depende sólo del dominio de modo que*

$$\frac{1}{d(x)^n} \int_{c_1 d(x) \leq |x-y| \leq c_2 d(x)} w(y)\,dy \leq c_3 w(x) \tag{1.2.32}$$

entonces vale la desigualdad de Poincaré mejorada (1.0.1) en $L^1_w(\Omega)$

Demostración. Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ luego se tiene que

$$|\varphi(y)| \leq C \int_{|x-y| \leq Md(x)} \frac{|\nabla\varphi(x)|}{|x-y|^{n-1}}\,dx$$

donde C es una constante que depende del dominio (para una prueba de esto ver [DD]). Multiplicando por w e integrando sobre Ω obtenemos que:

$$\int_\Omega |\varphi(y)|w(y)\,dy \leq C\int_\Omega\int_{|x-y|\leq Md(x)} \frac{|\nabla\varphi(x)|}{|x-y|^{n-1}}w(y)\,dx\,dy.$$

Cambiamos el orden de integración y entonces,

$$\int_\Omega |\varphi(y)|w(y)\,dy \leq C\int_\Omega\int_{|x-y|\leq Md(x)} \frac{w(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy|\nabla\varphi(x)|\,dx.$$

Ahora consideremos la integral en la variable y,

$$\int_{|x-y|\leq Md(x)} \frac{w(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{Md(x)2^{-(k+1)}\leq|x-y|\leq Md(x)2^{-k}} \frac{w(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy.$$

Pero si consideramos la clase de bolas tal que $diam(B) < \beta dist(B,\partial\Omega)$, con $\beta < 1$ se tiene que existe $k(\beta)$ tal que para $k > k(\beta)$, $B_{M2^{-k}d(x)}(x)$ pertenece a esta clase de bolas. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k(\beta)}^{\infty}\int_{Md(x)2^{-(k+1)}\leq|x-y|\leq Md(x)2^{-k}} \frac{w(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy &\leq \sum_{k=k(\beta)}^{\infty}\frac{1}{(Md(x)2^{-(k+1)})^{n-1}}\int_{|x-y|\leq Md(x)2^{-k}} w(y)\,dy\\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} Cd(x)2^{-n+1}2^{-k}\mathcal{M}_{loc,\Omega}w(x)\\
&\leq Cd(x)\mathcal{M}_{loc,\Omega}w(x)\\
&\leq Cd(x)w(x)
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos que el peso está en $A_1^{loc}(\Omega)$. Ahora resta acotar la parte de la suma para $k < k(\beta)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{k(\beta)}\int_{Md(x)2^{-(k+1)}\leq|x-y|\leq Md(x)2^{-k}} \frac{w(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy &\leq C\int_{c_1d(x)\leq|x-y|\leq c_2d(x)} \frac{w(y)}{|x-y|^{n-1}}\,dy\\
&\leq C\int_{c_1d(x)\leq|x-y|\leq c_2d(x)} \frac{w(y)}{d(x)^{n-1}}\,dy\\
&= C\frac{1}{d(x)^{n-1}}\int_{c_1d(x)\leq|x-y|\leq c_2d(x)} w(y)\,dy
\end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes que dependen del dominio. Luego sabemos por la hipótesis (1.2.32) que existe una constante c_3 tal que,

$$\frac{1}{d(x)^n}\int_{c_1d(x)\leq|x-y|\leq c_2d(x)} w(y)\,dy \leq c_3w(x)$$

entonces tenemos que la suma anterior está acotada por $Cw(x)d(x)$. Luego juntando las dos desigualdades para cada suma se tiene que

$$\int_\Omega |\varphi(y)|w(y)\,dy \leq C\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|d(x)w(x)\,dx.$$

□

Observación 1.2.33. Observemos que la condición $w \in L^1(\Omega)$ es necesaria para que tenga sentido $\varphi_{\Omega,w}$.

Ejemplo 1.2.34. Consideremos el peso $w(x) = d(x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Este peso está en la clase $A_1^{loc}(\Omega)$ y satisface la condición (1.2.32). En efecto, observemos que si Q es un cubo tal que $diam(Q) < \beta dist(Q, \partial\Omega)$ y $x, y \in Q$ entonces:

- Si $\alpha > 0$, $d(y) \leq (\beta + 1)d(x)$.
- Si $\alpha < 0$, $d(x) \leq (1 + \beta)d(y)$.

con lo cual
$$\sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q d(y)^\alpha \, dy \leq C d(x)^\alpha.$$
Además usando las desigualdades anteriores se sigue también que w satisface la condición (1.2.32). Sin embargo para que esté definido $\varphi_{\Omega,w}$ debe ser $w \in L^1(\Omega)$ y entonces se tiene que $\alpha > -1$.

Ejemplo 1.2.35. Sea F un subconjunto cerrado de $\partial\Omega$. Definimos $w(x) = dist(x, F)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego se puede ver de manera similar al ejemplo anterior que $w \in A_1^{loc}(\Omega)$ y satisface la condición (1.2.32). Además este peso pertenece a $L^1(\Omega)$ si $\alpha > -1$.

De la desigualdad de Poincaré en $L_w^1(\Omega)$ a la desigualdad en $L_w^p(\Omega)$

En esta sección veremos que a partir de la desigualdad que obtuvimos en $L_w^1(\Omega)$ con $w \in A_1^{loc}(\Omega)$ y satisfaciendo la condición (1.2.32) podemos probar la desigualdad de Poincaré mejorada en $L_w^p(\Omega)$. Las ideas para obtener este resultado están contenidas esencialmente en el trabajo [DMRT].

Veremos primero que la desigualdad de Poincaré mejorada en $L_w^1(\Omega)$ implica la desigualdad en $L_w^p(\Omega)$

Proposición 1.2.36. *Sea w un peso en $L^1(\Omega)$. Asumamos que vale la desigualdad de Poincaré mejorada en $L_w^1(\Omega)$. Luego si $1 \leq p < \infty$ vale la desigualdad de Poincaré en $L_w^p(\Omega)$*

Demostración. Utilizaremos el Lema 1.2.29. Sea E un conjunto tal que $w(E) \geq \frac{1}{2}w(\Omega)$ y supongamos que φ se anula en E. Aplicamos la desigualdad en $L_w^1(\Omega)$ a $|\varphi|^p$, que también se anula en E,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varphi(x)|^p w(x) \, dx &\leq \int_\Omega d(x) |\nabla |\varphi|^p(x)| w(x) \, dx \\
&= C \int_\Omega d(x) |\varphi(x)|^{p-1} |\nabla \varphi(x)| w(x)^{\frac{1}{p}} w(x)^{\frac{1}{p'}} \, dx
\end{aligned}$$

$$\leq \quad C \left(\int_\Omega |d(x)\nabla\varphi(x)|^p w(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^p w(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

basta pasar dividiendo el segundo factor para obtener la desigualdad buscada. □

Finalmente obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2.37. *Sea $w \in A_1^{loc}(\Omega)$ e integrable en Ω que satisface la condición 1.2.32. Entonces si $\varphi \in L^p_w(\Omega)$,*

$$||\varphi - \varphi_{\Omega,w}||_{L^p_w(\Omega)} \leq c||d|\nabla\varphi|||_{L^p_w(\Omega)}$$

Demostración. Al comienzo de esta sección vimos que vale la desigualdad de Poincaré en $L^1_w(\Omega)$ si w satisface las hipótesis del teorema. Luego la desigualdad se sigue inmediatamente del lema anterior. □

Ejemplo 1.2.38. Utilizando el teorema anterior volvemos a obtener la desigualdad (1.0.1) para el peso $w(x) = d(x)^\alpha$, $\alpha > -1$.

Capítulo 2

Descomposición de funciones de integral cero y aplicaciones

La desigualad de Poincaré mejorada (1.0.1) tiene varias aplicaciones. En particular, fue probado en [DMRT], que está relacionada con una descomposición para funciones de integral cero en un dominio Ω como suma de funciones localmente soportadas con la misma propiedad. Una aplicación interesante de esta descomposición es la resolubilidad de la divergencia en espacios de Sobolev (ver [DMRT, DRS]). Otra aplicación es la desigualdad de Fefferman-Stein, es decir la mayoración de la norma de una función por la norma de la maximal sharp de la función en norma con pesos.

Este capítulo se divide en dos partes. En la primera parte extendemos los argumentos dados en [DMRT] para obtener soluciones de la divergencia en espacios de Sobolev con pesos para ciertos pesos que no están necesariamente en A_p. En la segunda parte obtendremos la desigualdad de Fefferman-Stein local para pesos más generales que A_p.

Empezaremos estudiando la descomposición antes mencionada.

Recordemos que $w' := w^{-\frac{1}{p-1}}$ y que, si $w' \in L^1(\Omega)$ luego $L^p_w(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ y por lo tanto el espacio

$$L^p_{w,0}(\Omega) = \left\{ f \in L^p_w(\Omega) \,:\, \int_\Omega f = 0 \right\}$$

está bien definido. El siguiente lema es una generalización de los resultados obtenidos en [DMRT].

Lema 2.0.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de John, y $1 < p < \infty$, $\{Q_j\}$ una descomposición de Whitney de Ω y $\{Q_j^*\}$ cubos expandidos de Q_j. Sea $\{\phi_j\}$ la partición usual de la unidad asociada con la descomposición (ver por ejemplo [S2]). Dado un peso w tal que $w' \in L^1(\Omega)$, consideremos las siguientes propiedades,*

(1) $\|h - h_{\Omega,w'}\|_{L^{p'}_{w'}(\Omega)} \leq C \, \|d|\nabla h|\|_{L^{p'}_{w'}(\Omega)}$

$\forall h \in L^{p'}_{w'}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ *tal que* $\nabla h \in L^{p'}_{d^{p'}w'}(\Omega)^n$.

(2) Si $g \in L^p_{w,0}(\Omega)$ *existe* $u \in L^p_{d^{-p}w}(\Omega)^n$ *tal que*

$$\int_\Omega u \cdot \nabla h = \int_\Omega gh \qquad \forall h \in L^{p'}_{w'}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \quad \text{tal que} \quad \nabla h \in L^{p'}_{d^{p'}w'}(\Omega)^n \tag{2.0.2}$$

y

$$\left\| \frac{u}{d} \right\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C \left\| g \right\|_{L^p_w(\Omega)}. \tag{2.0.3}$$

(3) Si $g \in L^p_{w,0}(\Omega)$ *existe una descomposición*

$$g = \sum_j g_j$$

con $g_j \in L^p_{w,0}(\Omega)$*, supp* $g_j \subset Q_j^*$*, y*

$$\|g\|^p_{L^p_w(\Omega)} \approx \sum_j \|g_j\|^p_{L^p_w(Q_j^*)}.$$

Luego,

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3).$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Sea $S \subset L^{p'}_{d^{p'}w'}(\Omega)^n$ el subespacio dado por

$$S = \left\{ v \in L^{p'}_{d^{p'}w'}(\Omega)^n \, : \, v = \nabla h \quad \text{con } h \in L^{p'}_{w'}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \right\},$$

y sea $\mathcal{L}(\nabla h) = \int_\Omega gh$. Como $\int_\Omega g = 0$, $\mathcal{L}$ define un funcional lineal en S. Más aún, se sigue de (1) que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\nabla h)| = \left| \int_\Omega g(h - h_{\Omega,w'}) \right| &\leq C \left\| g \right\|_{L^p_w(\Omega)} \left\| h - h_{\Omega,w'} \right\|_{L^{p'}_{w'}(\Omega)} \\ &\leq C \left\| g \right\|_{L^p_w(\Omega)} \left\| d|\nabla h| \right\|_{L^{p'}_{w'}(\Omega)} \end{aligned}$$

Por el teorema de Hahn-Banach $\mathcal{L}$ puede extenderse como un funcional lineal continuo definido en $L^{p'}_{d^{p'}w'}(\Omega)^n$, y por lo tanto, por dualidad existe $u \in L^p_{d^{-p}w}(\Omega)^n$ tal que

$$\mathcal{L}(v) = \int_\Omega u \cdot v \quad \text{y} \quad \left\| \frac{u}{d} \right\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C \left\| g \right\|_{L^p_w(\Omega)}$$

en particular, tomando $v = \nabla h \in S$, obtenemos (2).

(2)⇒(1): Sea $h \in L^{p'}_{w'}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ tal que $\nabla h \in L^{p'}_{d^{p'}w'}(\Omega)^n$. Luego,

$$\|h - h_{\Omega,w'}\|_{L^{p'}_{w'}(\Omega)} = \sup_{\|g\|_{L^p_{w'}(\Omega)}=1} \int_\Omega (h - h_{\Omega,w'}) g w' = \sup_{\|g\|_{L^p_{w'}(\Omega)}=1} \int_\Omega h(g - g_{\Omega,w'}) w' \tag{2.0.4}$$

pero, como $(g - g_{\Omega,w'})w' \in L^p_{w,0}(\Omega)$ con

$$\|(g - g_{\Omega,w'})w'\|_{L^p_w(\Omega)} = \|g - g_{\Omega,w'}\|_{L^p_{w'}(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^p_{w'}(\Omega)},$$

sabemos por (2) que existe $u \in L^p_{d^{-p}w}(\Omega)^n$ tal que

$$\int_\Omega u \cdot \nabla h = \int_\Omega h(g - g_{\Omega,w'})w'$$

satisface

$$\left\|\frac{u}{d}\right\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\,\|(g - g_{\Omega,w'})w'\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^p_{w'}(\Omega)}.$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega h(g - g_{\Omega,w'})w' = \int_\Omega u \cdot \nabla h \leq \|d|\nabla h|\|_{L^{p'}_{w'}(\Omega)} \left\|\frac{u}{d}\right\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C\|d|\nabla h|\|_{L^{p'}_{w'}(\Omega)}\|g\|_{L^p_{w'}(\Omega)}$$

y reemplazando en (2.0.4) obtenemos (1).

(2) ⇒ (3) Dada $g \in L^p_{w,0}(\Omega)$ sea $u \in L^p_{d^{-p}w}(\Omega)^n$ como en (2). Observemos que, en particular, podemos tomar $h \in C^\infty_0(\Omega)$ en (2.0.2), y por lo tanto, $div\ u = g$ en Ω. Luego, definimos

$$g_j = \ div\ (\phi_j u)$$

y entonces, tenemos que

$$g = \ div\ u = \ div\ \Big(u\sum_j \phi_j\Big) = \sum_j \ div\ (\phi_j u) = \sum_j g_j$$

Como supp $\phi_j \subseteq Q^*_j$ tenemos que supp $g_j \subseteq Q^*_j$ y $\int g_j = 0$. Más aún, por la superposición finita de los cubos de la descomposición de Whitney tenemos que

$$|g(x)|^p \leq C\sum_j |g_j(x)|^p$$

y luego

$$\|g\|^p_{L^p_w(\Omega)} \leq C\sum_j \|g_j\|^p_{L^p_w(Q^*_j)}$$

donde la constante C depende sólo de p y n.

Para probar la otra desigualdad usamos que $\|\phi_j\|_{L^\infty} \leq 1$ y $\|\nabla\phi_j\|_{L^\infty} \leq C/d_j$, donde d_j es la distancia de Q_j a $\partial\Omega$. Luego,

$$\begin{aligned}\|g_j\|^p_{L^p_w(Q_j^*)} = \int_{Q_j^*} |g_j|^p w &= \int_{Q_j^*} |\ div\ (\phi_j u)|^p w \\ &= \int_{Q_j^*} |\nabla\phi_j \cdot u + \phi_j\ div\ u|^p w \\ &\leq C\left(\int_{Q_j^*} |\nabla\phi_j|^p |u|^p w + \int_{Q_j^*} |\phi_j(x)|^p |\ div\ u|^p w\right) \\ &\leq C\left(\left\|\frac{u}{d}\right\|^p_{L^p_w(Q_j^*)} + \|g\|^p_{L^p_w(Q_j^*)}\right)\end{aligned}$$

y entonces, usando nuevamente la superposición finita de los cubos Q_j^*, se sigue de (2.0.3) que

$$\sum_j \|g_j\|^p_{L^p_w(Q_j^*)} \leq C\,\|g\|^p_{L^p_w(\Omega)}\,.$$

□

Observación 2.0.5. En algunos casos las tres condiciones son equivalentes, por ejemplo si $w \in A_p$. Lo que se requiere para probar (3) ⇒ (2) es la resolubilidad de la divergencia en los cubos de Whitney.

2.1. Resolubilidad de la divergencia en espacios de Sobolev con pesos

Como una consencuencia del Lema 2.0.1 y la desigulada de Poincaré mejorada que obtuvimos antes obtenemos un resultado general que provee condiciones suficientes para la resolubilidad de la divergencia en espacios de Sobolev con pesos. En pocas palabras, la ecuación de la divergencia puede resolverse en espacios de Sobolev con pesos en dominios de John si puede resolverse en cubos.

Luego obtenemos algunos ejemplos de pesos que no están necesariamente en la clase A_p para los cuales vale la resolubilidad de la divergencia.

Además damos una generalización de los resultados de [DMRT] a espacios de Sobolev con pesos en la clase A_1.

Dado un dominio Ω y pesos w_0 y w_1, tales que $L^p_{w_0}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, definimos

$$W^{1,p}_{w_0,w_1}(\Omega) = \left\{v : \Omega \to \mathbb{R}^n \,:\, v \in L^p_{w_0}(\Omega)\,,\, |Dv| \in L^p_{w_1}(\Omega)\right\},$$

con su norma natural y

$$W^{1,p}_{0,w_0,w_1}(\Omega) = \overline{C^\infty_0(\Omega) \cap W^{1,p}_{w_0,w_1}(\Omega)}$$

Teorema 2.1.1. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $1 < p < \infty$. Sea w_0 y w_1 pesos con $w_0', w_1' \in L^1(\Omega)$ y tales que la desigualdad*

$$\left\| h - h_{\Omega,w_1'} \right\|_{L^{p'}_{w_1'}(\Omega)} \leq C \, \| d |\nabla h| \|_{L^{p'}_{w_1'}(\Omega)}$$

vale para todo $h \in L^{p'}_{w_1'}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$. Asumamos que, para toda $g \in L^p_{w_1,0}(Q)$ y todo cubo de tipo Whitney $Q \subset \Omega$, existe $u \in W^{1,p}_{0,w_0,w_1}(Q)$ que satisface

$$div\ u = g \qquad en\ Q$$

y

$$\|u\|_{L^p_{w_0}(Q)} + \|Du\|_{L^p_{w_1}(Q)} \leq C \|g\|_{L^p_{w_1}(Q)}$$

donde la constante C es independiente del cubo Q. Luego, para toda $g \in L^p_{w_1,0}(\Omega)$ existe $u \in W^{1,p}_{0,w_0,w_1}(\Omega)$ tal que

$$div\ u = g \qquad en\ \Omega$$

y

$$\|u\|_{L^p_{w_0}(\Omega)} + \|Du\|_{L^p_{w_1}(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^p_{w_1}(\Omega)}$$

Demostración. Primero observemos que $w_0' \in L^1(\Omega)$ implica que $L^p_{w_0}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, y por lo tanto, existen derivadas en el sentido distribucional de funciones en $L^p_{w_0}(\Omega)$ y entonces el espacio $W^{1,p}_{w_0,w_1}(\Omega)$ está bien definido. Ahora, como $w_1' \in L^1(\Omega)$, podemos aplicar el Lema 2.0.1, y entonces, dada $g \in L^p_{w_1,0}(\Omega)$ la descomponemos como $g = \sum g_j$ como en (3) del mismo lema. Por nuestra hipótesis, para cada j, existe $u_j \in W^{1,p}_{0,w_0,w_1}(Q_j^*)$ satisfaciendo

$$div\ u_j = g_j \qquad \text{en } Q_j^*$$

y

$$\|u_j\|_{L^p_{w_0}(Q_j^*)} + \|Du_j\|_{L^p_{w_1}(Q_j^*)} \leq C \|g_j\|_{L^p_{w_1}(Q_j^*)}.$$

Luego, definiendo $u = \sum_j u_j$, tenemos que div $u = g$. Más aún,

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{L^p_{w_0}(\Omega)} + \|Du\|^p_{L^p_{w_1}(\Omega)} &= \int_\Omega \Big| \sum_j u_j(x) \Big|^p w_0(x)\, dx + \int_\Omega \Big| \sum_j Du_j \Big|^p w_1(x)\, dx \\ &\leq C \sum_j \int_{Q_j^*} \Big\{ |u_j(x)|^p \, w_0(x) + |Du_j(x)|^p \, w_1(x) \Big\}\, dx \\ &\leq C \sum_j \int_{Q_j^*} |g_j(x)|^p \, w_1(x)\, dx \leq C ||g||^p_{L^p_{w_1}(\Omega)} \end{aligned}$$

□

Observación 2.1.2. Notemos que en el teorema anterior puede reemplazarse la resolubilidad en cubos por las resolubilidad en bolas.

2.1.1. Ejemplos

Como ejemplo, veremos que el Teorema 2.1.1 puede aplicarse para resolver la resolubilidad de la divergencia con pesos en $A_p^{loc}(\Omega)$ y pesos potencia.

Caso $A_p^{loc}(\Omega)$

Sea $w \in A_{loc}^p(\Omega)$ tal que $w' \in L^1(\Omega)$, donde Ω es un dominio de John acotado. Fijado un cubo $Q \subset \Omega$ admisible por el lema 1.2.9 existe un peso $\bar{w}$ tal que $\bar{w}|_Q = w$, $\bar{w} \in A_p(\mathbb{R}^n)$ y $[\bar{w}]_{A_p} \leq c_n[w]_{A_p^{loc}(\Omega)}$. Como $w' \in L^1(\Omega)$ y $w' \in A_{p'}^{loc}(\Omega)$ entonces vale la desigualdad de Poincaré mejorada (1.0.1). Con lo cual para poder aplicar el Teorem 2.1.1 bastará probar la resolubilidad en cubos.

Lema 2.1.3. *Sea $Q \subset \Omega$ un cubo de tipo Whitney. Dada $f \in L_w^p(Q)$, $1 < p < \infty$, existe u tal que*

$$\begin{aligned} div\ u = f \ \ en\ Q \\ ||D_x u||_{L_w^p(Q)} \leq C[w]_{A_p^{loc}(\Omega)}^{\text{máx}(1,\frac{1}{p-1})}||f||_{L_w^p(Q)} \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Demostración. En primer lugar vamos a considerar el cubo unitario, notémoslo Q_1 (basta considerar un cubo fijo contenido en Ω, podemos suponer que es el unitario). Sea $\tilde{w} \in A_p(\mathbb{R}^n)$, luego tenemos que por el trabajo [S] dada $\tilde{f} \in L_{\tilde{w}}^p(Q_1)$ con integral cero en Q_1 existe $\tilde{u}$ tal que

$$\begin{aligned} div\ \tilde{u} = \tilde{f} \\ ||D\tilde{u}||_{L_{\tilde{w}}^p(Q_1)} \leq C_{Q_1}C(\tilde{w})||\tilde{f}||_{L_{\tilde{w}}^p(Q_1)} \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Ahora veamos que $C(\tilde{w}) \leq [\tilde{w}]_{A_p}^{\text{máx}(1,\frac{1}{p-1})}$. Citando nuevamente [S] se puede ver que

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} = T_1\tilde{f} + T_2\tilde{f}$$

con $||T_1|| \leq ||T^*||$, T^* el operador maximal de un operador T que cumple las propiedades del Teorema 0.0.24 y T_2 es un operador con núcleo en L^∞. Por el Teorema 0.0.33 se tiene que

$$||T_1\tilde{f}||_{L_{\tilde{w}}^p(Q_1)} \leq C_{Q_1,T_1}[\tilde{w}]_{A_p}^{\text{máx}(1,\frac{1}{p-1})}||\tilde{f}||_{L_{\tilde{w}}^p(Q_1)}.$$

Ahora a partir de lo que sabemos para el cubo unitario probémoslo para un cubo cualquiera $Q \subset \Omega$. Sea $x = \lambda y$ con $y \in Q_1$ y $x \in Q$. Definimos $\tilde{f}(y) := \lambda^n f(x)$ y $\tilde{w}(y) := \bar{w}(\lambda y)$, donde $\bar{w}$ está definido como en el Lema 1.2.9. Vimos en el Corolario 1.2.14 que $\tilde{w} \in A_p$ y $[\bar{w}]_{A_p} = [\tilde{w}]_{A_p}$. Luego tenemos que existe $\tilde{u}$ solución de (2.1.5). Ahora definamos $u(x) := \lambda^{1-n}\tilde{u}(\frac{x}{\lambda})$, se tiene que $div_x u = f$. Por otro lado,

$$\int_Q |D_x u(x)|^p \bar{w}(x)\,dx \ \ = \ \ \int_Q |\lambda^{1-n} D_x\tilde{u}\left(\frac{x}{\lambda}\right)|^p \bar{w}(x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{Q_1} |\lambda^{-n} D_y \tilde{u}(y)|^p \tilde{w}(y) \lambda^n \, dy \\
&\leq C_{Q_1} [\tilde{w}]_{A_p}^{\text{máx}(1,\frac{1}{p-1})p} \int_{Q_1} |\lambda^{-n} \tilde{f}(y)|^p \tilde{w}(y) \lambda^n \, dy \\
&= C_{Q_1} [\bar{w}]_{A_p}^{\text{máx}(1,\frac{1}{p-1})p} \int_{Q} |f(x)|^p \bar{w}(x) \, dx.
\end{aligned}
$$

Ahora usando que $\bar{w}|_Q = w$ y que $[\bar{w}]_{A_p} \leq C_n [w]_{A_p^{loc}(\Omega)}$ tenemos el lema probado. □

Tenemos en consecuencia el siguiente teorema.

Teorema 2.1.6. *Sea $w \in A_p^{loc}(\Omega)$, dada $f \in L_w^p(\Omega)$ existe u tal que*

$$div\ u = f$$

$$||Du||_{L_w^p(\Omega)} \leq C[w]_{A_p^{loc}(\Omega)}^{\text{máx}(1,\frac{1}{p-1})} ||f||_{L_w^p(\Omega)}$$

La demostración sale inmediatamente aplicando el Teorema 2.1.1

Caso pesos potencia

Teorema 2.1.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y de John tal que $0 \in \Omega$, $1 < p < \infty$, y $-\infty < \gamma < n(p-1)$. Si $g \in L^p_{|x|^\gamma,0}(\Omega)$ existe $u \in W^{1,p}_{0,|x|^\gamma,|x|^\gamma}(\Omega)$ tal que*

$$div\ u = g \qquad en\ \Omega$$

y

$$\|u\|_{L^p_{|x|^\gamma}(\Omega)} + \|Du\|_{L^p_{|x|^\gamma}(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^p_{|x|^\gamma}(\Omega)} \tag{2.1.8}$$

Demostración. Primero observemos que , si $w(x) = |x|^\gamma$, luego $w' = |x|^{-\frac{\gamma}{p-1}} \in L^1(\Omega)$, y de las hipótesis $-\frac{\gamma}{p-1} > -n$. En particular $L^p_{|x|^\gamma}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ y entonces $L^p_{|x|^\gamma,0}(\Omega)$ y $W^{1,p}_{0,|x|^\gamma,|x|^\gamma}(\Omega)$ están bien definidos.

Ahora, si $-n < \gamma < n(p-1)$, el peso $|x|^\gamma$ está en A_p, y por lo tanto, el resultado fue probado en [DRS, Page 103]. Aunque los autores de este trabajo sólo prueban la cota para el segundo término del lado izquierdo de (2.1.8), la estimación para el otro término se sigue inmediatamente por la desigualdad de Poincaré con pesos (la cual es válida para pesos en la clase A_p).

Por otro lado, para el caso $\gamma \leq -n$, procedemos con en el Ejemplo 1.2.20 e introducimos $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \{0\}$. Es fácil ver que, si $\phi \in C_0^\infty(\Omega) \cap L^p_{|x|^\gamma}(\Omega)$, luego $\phi(0) = 0$, y entonces,

$$W^{1,p}_{0,|x|^\gamma,|x|^\gamma}(\tilde{\Omega}) = W^{1,p}_{0,|x|^\gamma,|x|^\gamma}(\Omega).$$

Por lo tanto, podemos concluir la prueba aplicando el Teorema 2.1.1 en $\tilde{\Omega}$. De hecho, las hipótesis de ese teorema sobre la existencia de soluciones en cubos de tipo Whitney se verifican fácilmente dado que el peso restringido a estos cubos se comporta como constante (ver detalles en Ejemplo 1.2.20). $\square$

Veremos que el Teorema 2.1.7 con $1 < p < n$ puede mejorarse reemplazando el término $\|u\|_{L^p_{|x|^\gamma}(\Omega)}$ en (2.1.8) por el término $\|u\|_{L^p_{|x|^{\gamma-p}}(\Omega)}$. Para hacer esto usaremos una técnica basada en cambio de variables via aplicaciones cuasi-conformes.

Vale destacar que no pueden mejorarse las cotas de las derivadas de u, en general si $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\|\phi\|_{L^p_{|x|^{\gamma-p}}(\Omega)} \not\leq C\|\nabla\phi\|_{L^p_{|x|^\gamma}(\Omega)},$$

de hecho, si $-n < \gamma \leq -n+p$ y ϕ es igual a uno en un entorno de 0, el lado derecho es finito mientras que el lado izquierdo no.

Para $-\infty < \gamma \leq -n$ el resultado del siguiente teorema puede mejorarse utilizando el mismo argumento del Teorema 2.1.1, y en consecuencia, el caso de interés es para $-n < \gamma < n(p-1)$. Sin embargo, como el argumento es independiente del valor de γ, escribimos la prueba en el caso general.

Teorema 2.1.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y de John tal que $0 \in \Omega$, $1 < p < n$, y $-\infty < \gamma < n(p-1)$. Dada $g \in L^p_{|x|^\gamma,0}(\Omega)$ existe $u \in W^{1,p}_{0,|x|^{\gamma-p},|x|^\gamma}(\Omega)$ tal que*

$$div\ u = g \quad en\ \Omega$$

y

$$\|u\|_{L^p_{|x|^{\gamma-p}}(\Omega)} + \|Du\|_{L^p_{|x|^\gamma}(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^p_{|x|^\gamma}(\Omega)}$$

Demostración. Observemos al igual que en el Teorema 2.1.7 que los espacios $L^p_{|x|^\gamma,0}(\Omega)$ y $W^{1,p}_{0,|x|^{\gamma-p},|x|^\gamma}(\Omega)$ están bien definidos.

Definimos $w_1(x) = |x|^\gamma$ y tenemos que $w_1'(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha = -\frac{\gamma}{p-1} > -n$ y entonces, en vista del Ejemplo 1.2.20, vale la desigualdad de Poincaré mejorada con pesos

$$\left\|h - h_{\Omega,w_1'}\right\|_{L^{p'}_{w_1'}(\Omega)} \leq C \left\|d\nabla h\right\|_{L^{p'}_{w_1'}(\Omega)}.$$

Por lo tanto, el resultado será una consecuencia del Teorema 2.1.1, si probamos la resolubilidad de la divergencia en cubos. Probaremos esto en el siguiente lema para bolas por simplicidad de las cuentas pero el resultado se sigue también para cubos. Lo haremos para una clase de pesos más general que incluirá el caso de estas potencias. $\square$

Consideremos un peso $w(x) = |x|^\beta w_0(x)$ con w_0 en A_p y β variando en cierto rango a determinar. Consideremos la aplicación cuasi-conforme $y = f(x) = |x|^\alpha x$, $\alpha > -1$ y Jf el valor absoluto del Jacobiano de la matriz diferencial. Definimos los pesos $v_0(x) = Jf(x)^{1-p-p/\alpha n} w(x)$ y $v_1(x) = Jf(x)^{1-p} w(x)$.

Lema 2.1.10. *Sea B una bola , v_0 y v_1 definidos como antes con $(\alpha+1)p-\alpha n \leq \beta < \alpha n(p-1)$. Dada $g \in L^p_{v_1}(B)$ existe $u \in W^{1,p}_{v_0,v_1}(B)$ tal que*

$$\begin{aligned} &div\ u = g \ en\ B \\ &||u||_{L^p_{v_0}(B)} + ||D_x u||_{L^p_{v_1}(B)} \leq C||g||_{L^p_{v_1}(B)} \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Demostración. Definimos $h(y) = g(x)Jf^{-1}(f(x))$. Luego, $h \in L^p_{v_1\circ f^{-1},0}(f(B))$. El peso $w\circ f^{-1} \in A_p$ (Ver [CW]). Además como $f(B)$ es un dominio de John se tiene la resolubilidad de la divergencia (Ver [DRS]), o sea, existe $v \in W^{1,p}_{|y|^{-p}w\circ f^{-1},w\circ f^{-1},0}(f(B))$ tal que

$$\text{div } v = h \quad \text{ en } f(B) \tag{2.1.12}$$

y

$$\int_{f(B)} |Dv(y)|^p (w\circ f^{-1})(y)\,dy \leq C\int_{f(B)} |h(y)|^p (w\circ f^{-1})(y)\,dy,$$

.

Luego usando la transformada de Piola (ver [DL] para su definición) definimos

$$u(x) = Jf(x)Df^{-1}(f(x))v(f(x)). \tag{2.1.13}$$

Se puede ver fácilmente que

$$div\ u = g$$

Observar que si cambiamos variables $y = f(x)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{f(B)} |h(y)|^p (w\circ f^{-1})(y)\,dy &= \int_B |g(x)Jf(x)|^p Jf(x)^{-p} Jf(x) w(x)\,dx \\ &+ \int_B |g(x)|^p Jf(x)^{1-p} w(x)\,dx = \int_B |g(x)|^p v_1(x)\,dx \end{aligned}$$

Ahora, llamemos $\hat{w} = w\circ f^{-1}$ luego

$$\begin{aligned} &\int_B |D_x u(x)|^p v_1(x)\,dx \\ &\leq \int_{f(B)} |D_y \left[D_y f^{-1}(y)(Jf^{-1}(y))^{-1}\right] (Df^{-1}(y))^{-1} v(y)|^p \hat{w}(y) Jf^{-1}(y)^p\,dx \\ &+ \int_{f(B)} |D_y f^{-1}(y)(Jf^{-1}(y))^{-1} D_y v(y)(D_y f^{-1}(y))^{-1})|^p Jf^{-1}(y)^p \hat{w}(y)\,dy \\ &= I + II \end{aligned}$$

Como f y f^{-1} son cuasi-conformes tenemos que

$$|D_y f^{-1}(y)| \leq C(Jf^{-1}(y))^{1/n}$$
$$|(D_y f^{-1}(y))^{-1}| = |D_x f(x)| \leq CJf(x)^{1/n} = C(Jf^{-1}(y))^{-1/n}$$

Pero se tiene que,

$$|DJf(x)| \leq C|x|^{\alpha n-1} = |y|^{\frac{\alpha n-1}{\alpha+1}},$$

y

$$Jf^{-1}(y) \leq C|y|^{-\frac{\alpha n}{\alpha+1}} \quad \text{y} \quad Jf(x) = (Jf^{-1}(y))^{-1} \leq C|y|^{\frac{\alpha n}{\alpha+1}} \tag{2.1.14}$$

Entonces

$$II \leq C\int_{f(Q)} |D_y v(y)|^p \hat{w}(y)\, dy,$$

Ahora tenemos que,

$$|D_y^2 f^{-1}(y)| \leq C|y|^{-\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}} \quad \text{y} \quad |D_x f(f^{-1}(y))| \leq C|y|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}},$$

con lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{f(Q)} \left|D^2 f^{-1}(y)\right|^p \left|Df(f^{-1}(y))\right|^p |v(y)|^p \,(Jf^{-1}(y))^{p-1}\hat{w}(y)\, dy \\ &\leq C\int_{f(Q)} |y|^{-p}|v(y)|^p \hat{w}(y)\, dy. \end{aligned}$$

Por otro lado se puede ver que,

$$||u||_{L^p_{v_1}(B)} \leq \left(\int_{f(B)} |y|^{-p}|v(y)|^p\hat{w}(y)\, dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

Con lo cual basta probar que

$$\int_{f(B)} |y|^{-p}|v(y)|^p\hat{w}(y)\, dy \leq C\int_{f(B)} |D_y v(y)|^p\hat{w}(y)\, dy$$

y utilizando la continuidad de la integral fraccionaria con dos pesos (Teorema 0.0.28) tenemos que esto vale si se cumple que existe un $r > 1$ tal que

$$\sup_Q |Q|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |y|^{-pr}\hat{w}^r(y)\, dy\right)^{\frac{1}{pr}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \hat{w}^{-\frac{r}{p-1}}(y)\, dy\right)^{\frac{1}{p'r}} \tag{2.1.15}$$

es finito, donde Q es una bola contenida en B.

Para verificar si se satisface (2.1.15) cambiamos variables. Para el primer término

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |y|^{-pr}\hat{w}^r(y)\,dy\right)^{\frac{1}{pr}} &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_{f^{-1}(Q)} |x|^{-(\alpha+1)pr} w^r(x)|x|^{\alpha n}\,dx\right)^{\frac{1}{pr}} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|}\int_{f^{-1}(Q)} |x|^{-(\alpha+1)pr+\alpha n} w^r(x)\,dx\right)^{\frac{1}{pr}} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|}\int_{f^{-1}(Q)} |x|^{-(\alpha+1)pr+\alpha n+\beta r} w_0^r(x)\,dx\right)^{\frac{1}{pr}}
\end{aligned}
$$

$$
|Q| = \int_Q 1\,dy = \int_{f^{-1}(Q)} Jf(x)\,dx \approx \int_S |x|^{\alpha n}\,dx
$$

donde $f^{-1}(Q) = S$. Luego tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |y|^{-pr}\hat{w}^r(y)\,dy\right)^{\frac{1}{pr}} &\approx \left(\frac{1}{\int_S |x|^{\alpha n}\,dx}\int_S |x|^{-(\alpha+1)pr+\alpha n+\beta r} w_0^r(x)\,dx\right)^{\frac{1}{pr}} \\
&= I_1
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \hat{w}^{-\frac{r}{p-1}}(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p'r}} &\approx \left(\frac{1}{\int_S |x|^{\alpha n}\,dx}\int_{f^{-1}(Q)} w^{-\frac{r}{p-1}}(x)|x|^{\alpha n}\,dx\right)^{\frac{1}{p'r}} \\
&= \left(\frac{1}{\int_S |x|^{\alpha n}\,dx}\int_S |x|^{-\frac{r\beta}{p-1}}|x|^{\alpha n} w_0^{-\frac{r}{p-1}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'r}} \\
&= \left(\frac{1}{\int_S |x|^{\alpha n}\,dx}\int_S |x|^{-\frac{\beta r}{p-1}+\alpha n} w_0^{-\frac{r}{p-1}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'r}} \\
&= I_2
\end{aligned}
$$

Tiene que cumplirse que

$$
-(\alpha+1)pr + \alpha n + \beta r \geq 0
$$

o sea

$$
-(\alpha+1)p + \alpha n + \beta \geq 0
$$

entonces

$$
\beta \geq (\alpha+1)p - \alpha n
$$

Además

$$
-\frac{\beta r}{p-1} + \alpha n \geq 0
$$

entonces es suficiente pedir que $\frac{\beta}{p-1} \leq \alpha n$. Ahora bien, para que haya un rango de β tiene que pasar que: $(\alpha+1)p - \alpha n < \alpha n(p-1)$, reescribimos esto y nos queda $\alpha(p-n-n(p-1)) < -p$ o sea $\alpha p(1-n) < -p$ y entonces $\alpha > \frac{1}{n-1}$.

Ahora para acotar $|Q|^{\frac{1}{n}}(I_1)(I_2)$ consideramos dos casos : (1) $Q = B_R(0)$ y (2) $Q = B_R(y_0)$ con $y_0 \neq 0$

Caso (1): Es fácil ver que $f^{-1}(Q) = B_{R^{\frac{1}{\alpha+1}}}(0)$. Luego

$$\begin{aligned}
&|Q|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |y|^{-pr}\hat{w}^r(y)\,dy\right)^{\frac{1}{pr}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \hat{w}^{-\frac{r}{p-1}}(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p'r}} \\
&= CR\left(R^{-pr+\frac{\alpha n}{\alpha+1}+\frac{\beta r}{\alpha+1}-n+\frac{n}{\alpha+1}}\frac{1}{|B_{R^{\frac{1}{\alpha+1}}}(0)|}\int_{B_{R^{\frac{1}{\alpha+1}}}(0)} w_0^r(x)\,dx\right)^{\frac{1}{pr}} \\
&\left(R^{\frac{\alpha n}{\alpha+1}-\frac{\beta r}{(\alpha+1)(p-1)}-n+\frac{n}{\alpha+1}}\frac{1}{|B_{R^{\frac{1}{\alpha+1}}}(0)|}\int_{B_{R^{\frac{1}{\alpha+1}}}(0)} w_0^{-\frac{r}{p-1}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'r}} \\
&= C\left(\frac{1}{|B_{R^{\frac{1}{\alpha+1}}}(0)|}\int_{B_{R^{\frac{1}{\alpha+1}}}(0)} w_0^r(x)\,dx\right)^{\frac{1}{pr}}\left(\frac{1}{|B_{R^{\frac{1}{\alpha+1}}}(0)|}\int_{B_{R^{\frac{1}{\alpha+1}}}(0)} w_0^{-\frac{r}{p-1}}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'r}} \\
&:= A.
\end{aligned}$$

Como sabemos que $w_0 \in A_p$ tenemos por la propiedad (6) de la Proposición 0.0.22 que existe $r > 1$ tal que $w_0^r \in A_p$. Con lo cual eligiendo este r tenemos $A < \infty$.

Caso (2): Consideremos dos tipos de bolas: Si $|y_0| < 2R$ tenemos que $B_R(y_0) \subseteq B_{3R}(0)$ luego

$$\begin{aligned}
&|B_R(y_0)|^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{|B_R(y_0)|}\int_{B_R(y_0)}|y|^{-pr}\hat{w}^r(y)\,dy\right)^{\frac{1}{pr}}\left(\frac{1}{|B_R(y_0)|}\int_{B_R(y_0)}\hat{w}^{-\frac{r}{p-1}}(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p'r}} \\
&\leq C|B_{3R}(0)|^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{|B_{3R}(0)|}\int_{B_{3R}(0)}|y|^{-pr}\hat{w}^r(y)\,dy\right)^{\frac{1}{pr}}\left(\frac{1}{|B_{3R}(0)|}\int_{B_{3R}(0)}\hat{w}^{-\frac{r}{p-1}}(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p'r}}
\end{aligned}$$

Entonces reducimos esto al caso (1).

Si $|y_0| > 2R$, tenemos que $|y| \geq |y_0| - |y-y_0| \geq 3R - R = 2R$. Luego

$$\begin{aligned}
&|B_R(y_0)|^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{|B_R(y_0)|}\int_{B_R(y_0)}|y|^{-pr}\hat{w}^r(y)\,dx\right)^{\frac{1}{pr}}\left(\frac{1}{|B_R(y_0)|}\int_{B_R(y_0)}\hat{w}^{-\frac{r}{p-1}}(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p'r}} \\
&\leq RR^{-1}\left(\frac{1}{|B_R(y_0)|}\int_{B_R(y_0)}\hat{w}^r(y)\,dy\right)^{\frac{1}{pr}}\left(\frac{1}{|B_R(y_0)|}\int_{B_R(y_0)}\hat{w}^{-\frac{r}{p-1}}(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p'r}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

donde aplicando el Lema 2.3 de [CW] tenemos que $\hat{w} = w \circ f^{-1} \in A_p$ y entonces existe $r > 1$ tal que $\hat{w}^r \in A_p$. $\square$

Con este lema obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.16. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio de John, $1 < p < \infty$. Como antes $f(x) = |x|^\alpha x$, con $\alpha > -1$ $w(x) = |x|^\beta w_0(x)$, con $w_0(x) \in A_p$, $(\alpha+1)p - \alpha n < \beta < \alpha n(p-1)$ y*

$$v_0(x) = Jf(x)^{1-p-\frac{p}{\alpha n}} w(x) \text{ y } v_1(x) = Jf(x)^{1-p} w(x).$$

Dada $g \in L^p_{v_1}(\Omega)$, existe $u \in W^p_{0,v_0,v_1}(\Omega)$ tal que

$$div\ u = g \quad en\ \Omega$$

y

$$\|u\|_{L^p_{v_0}(\Omega)} + \|Du\|_{L^p_{v_1}(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^p_{v_1}(\Omega)}.$$

Demostración. Observar que por el Lema 2.1.10 tenemos la resolubilidad de la divergencia en bolas y por la Observación 2.1.2 podemos aplicar el Teorema 2.1.1. Un caso particular resulta si $w_0 = 1$. Luego, $v_0(x) \approx |x|^{\alpha n(1-p)-p}$ y $v_1(x) \approx |x|^{\alpha n(1-p)}$, con lo cual si $\gamma = \alpha n(1-p)$, teniendo en cuenta que $\alpha > -1$, llegamos a que $\gamma < (p-1)n$. $\square$

2.1.2. Resolubilidad de la divergencia en dominios acotados generales

En esta sección daremos una condición sobre un dominio Ω para obtener la resolubilidad de la divergencia en espacios con pesos A_1.

Resolubilidad de la divergencia en L^∞

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y v un peso en la clase A_1. En esta sección veremos que bajo ciertas condiciones del dominio existe un peso $W(x) \in L^1_v(\Omega)$ tal que si $\frac{f}{v} \in L^\infty$ y $\int_\Omega f = 0$, entonces existe u solución de

$$\begin{cases} \text{div } u = f \text{ en } \Omega \\ u.\nu = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.17}$$

con

$$\left\|\frac{u}{Wv}\right\|_{L^\infty} \leq C \left\|\frac{f}{v}\right\|_{L^\infty}.$$

Como mencionamos en la introducción, la idea es generalizar los resultados obtenidos en el trabajo [DMRT].

Definición 2.1.18. Dada una curva rectificable γ definida en $[0,1]$ tal que $\gamma(0) = y$ y $\gamma(1) = x$, notamos $l(\gamma)$ a la longitud de dicha curva. Definimos

$$dist_\Omega(y,x) := \text{ínf}\, l(\gamma).$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas rectificables tales que $\gamma(0) = y$ y $\gamma(1) = x$.

Si elegimos x_0 un punto de referencia denotamos $d_\Omega(y)$ a $dist_\Omega(y, x_0)$.

Para poder construir una solución de (2.1.17) necesitamos elegir adecuadamente una familia de curvas que conectan a cada punto de Ω con x_0. Para ello fijamos una descomposición de Whitney de Ω, $\{Q_j\}$ Denotamos x_j y l_j al centro y longitud del cubo Q_j respectivamente. Elegimos curvas γ_j que conectan x_j con x_0 de modo que $l(\gamma_j) \leq 2d_\Omega(x_j)$. Cuando γ_j interseca a Q_k reemplazamos $\gamma_j \cap Q_k$ por el segmento que une los puntos extremos. En particular llamamos $[x_j, \tilde{x_j}]$ el segmento $\gamma_j \cap Q_j$. Vamos a seguir nombrando a esta curva γ_j. Observar que no se aumentó la longitud de la curva y se satisface que

$$l(\gamma_j \cup B_r(x)) \leq Cr$$

para todo $x \in \Omega$ y $r \leq \frac{1}{2}d(x)$, donde C depende sólo de la dimensión. Ahora definimos las curvas $\gamma(y)$ que conectan y con x_0. Fijado y puede pertenecer a más de un cubo de Whitney pero elegimos uno. Esto es, sea j tal que $y \in Q_j$. Ahora conectamos y con $\tilde{x_j}$ con un segmento y luego $\tilde{x_j}$ con x_0 con la curva γ_j. A la curva resultante la vamos a llamar $\gamma(y)$. Es claro que conecta y con x_0 y a cada punto lo notaremos $\gamma(t,y)$ con $t \in [0,1]$. Por construcción de las curvas $\gamma(y)$ tenemos las siguientes propiedas:

(a) Para todo $y \in \Omega$, $t \in [0,1]$, $\gamma(t,y) \in \Omega$, $\gamma(0,y) = y$, $\gamma(1,y) = x_0$.

(b)$(t,y) \mapsto \gamma(t,y)$ es medible y $\gamma(y)$ es rectificable.

(c) Existe $C > 0$, que sólo depende de la dimensión, tal que para todo $x, y \in \Omega$ y para todo $r \leq \frac{1}{2}d(x)$

$$l(\gamma(y) \cap B_r(x)) \leq Cr$$

$$l(\gamma(y)) \leq Cd_\Omega(y).$$

(d) Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente chico, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in \Omega_\varepsilon$, $\gamma(y) \subseteq \Omega_\delta$

$$\text{donde } \Omega_s = \{z \in \Omega, d(z) > s\}.$$

Ahora que tenemos la familia de curvas definida, enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.19. *Sea Ω un dominio acotado. Sea $v \in A_1^{loc}(\Omega)$ tal que para cierta constante $\alpha > 0$ (a determinar)*

$$\frac{1}{d(x)^n} \int_{|x-y| \leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha} d(x)} v(y)\, dy \leq Cv(x)$$

donde C depende de Ω El problema (2.1.17) tiene solución en Ω si y sólo si $d_\Omega \in L^1_v(\Omega)$.

Demostración. Supongamos que (2.1.17) tiene solución en Ω. Por dualidad y el Lema 1.2.29, resolver (2.1.17) es equivalente a lo siguiente: si $g \in L^1_v(\Omega)$ y $K \subseteq \Omega$ un conjunto compacto de medida no nula tal que g se anula allí entonces

$$||g||_{L^1_v(\Omega)} \leq C||W|\nabla g|||_{L^1_v(\Omega)}.$$

Usando esta equivalencia vamos a probar que $d_\Omega \in L^1_v(\Omega)$. Para esto consideremos $f(x) = (d_\Omega(x) - r_0)_+$, donde r_0 es el radio de una bola fija centrada en x_0 contenida en Ω. Sean $x, y \in \Omega$ suficientemente cerca, luego vale que $|d_\Omega(y) - d_\Omega(x)| \leq |y - x|$, entonces $|\nabla f(x)| \leq 1$ en casi todo punto. Con lo cual,

$$\int_\Omega |f(x)|v(x)\, dx \leq \int_\Omega CW(x)|\nabla f(x)|v(x)\, dx \leq C \int_\Omega W(x)v(x)\, dx < +\infty.$$

Por lo tanto $d_\Omega \in L^1_v(\Omega)$. Ahora para completar la prueba asumimos que $d_\Omega \in L^1_v(\Omega)$ y vamos a construir una solución de (2.1.17). □

Definimos ahora un peso ω definido en Ω (que depende implícitamente de la familia γ) por

$$\omega(x) = \int_{\left\{y \in \Omega : dist_\Omega(\gamma(y), x) \leq \frac{1}{2} d(x)\right\}} v(y)\, dy$$

llamaremos $D_x = \left\{y \in \Omega : dist_\Omega(\gamma(y), x) \leq \frac{1}{2} d(x)\right\}$.

Lema 2.1.20. *Definimos el peso $W(x) = d(x)\omega(x) \left(\int_{B_{\frac{d(x)}{2}}(x)} v(y)\, dy \right)^{-1}$, donde $B_{\frac{d(x)}{2}}(x)$ es la bola de centro x y radio $\frac{d(x)}{2}$. Luego $W \in L^1_v(\Omega)$.*

Demostración. Utilizamos la siguiente notación $\int_{B_{\frac{d(x)}{2}}(x)} v(y)\, dy = v(B_{\frac{d(x)}{2}}(x))$. Sea y tal que existe t_0 que satisface $dist_\Omega(\gamma(t_0, y), x) \leq \frac{d(x)}{2}$, esto es lo mismo que $|\gamma(t_0, y) - x| \leq$

$\frac{d(x)}{2}$. Luego tenemos que $|\gamma(t,y)-x| < \frac{3}{4}d(x)$, siempre que $|\gamma(t,y)-\gamma(t_0,y)| < \frac{1}{4}d(x)$. Esto implica que:

$$\begin{aligned} d(x) &\leq 4l(\gamma(y)\cap B_{\frac{1}{4}d(x)}(\gamma(t_0,y))) \\ &\leq 4\int_0^1 |\dot\gamma(t,y)|1_{|\gamma(t,y)-x|<\frac{3}{4}d(x)}\,dt \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_\Omega W(x)v(x)\,dx &= \int_\Omega d(x)\omega(x)\left(v(B_{\frac{d(x)}{2}}(x))\right)^{-1}v(x)\,dx \\ &\leq 4\int_\Omega\int_0^1 |\dot\gamma(t,y)|1_{|\gamma(t,y)-x|<\frac{3}{4}d(x)}\,dt\omega(x)\left(v(B_{\frac{d(x)}{2}}(x))\right)^{-1}v(x)\,dx \\ &= 4\int_\Omega\int_{D_x} v(y)v(x)\int_0^1 |\dot\gamma(t,y)|1_{|\gamma(t,y)-x|<\frac{3}{4}d(x)}\left(v(B_{\frac{d(x)}{2}}(x))\right)^{-1}dt\,dy\,dx \end{aligned}$$

consideremos la integral respecto de x y la acotamos,

$$\int_\Omega 1_{|\gamma(t,y)-x|<\frac{3}{4}d(x)}v(x)\left(v(B_{\frac{d(x)}{2}}(x))\right)^{-1}dx$$

Observemos que las medidas con respecto a v de $B_{d(\gamma(t,y))}(\gamma(t,y))$ y $B_{\frac{d(x)}{2}}(x)$ son comparables. En efecto, sea $w\in\partial\Omega$,

$$|\gamma(t,y)-w| \leq |x-w|+|\gamma(t,y)-x| \leq |x-w|+\frac{3}{4}d(x)$$

entonces $d(\gamma(t,y)) \leq \frac{7}{4}d(x)$. Por otro lado,

$$|x-w| \leq |x-\gamma(t,y)|+|\gamma(t,y)-w| \leq \frac{3}{4}d(x)+|\gamma(t,y)-w|$$

luego $\frac{1}{4}d(x) \leq d(\gamma(t,y))$. Además

$$B_{\frac{4}{7}d(\gamma(t,y))}(\gamma(t,y)) \subseteq B_{\frac{7}{4}d(x)}(x)$$

y

$$_{\frac{1}{4}d(x)}B(x) \subseteq B_{4d(\gamma(t,y))}(\gamma(t,y)).$$

Usando esto y que v es doblante tenemos que,

$$\int_{B_{\frac{4}{7}d(\gamma(t,y))}(\gamma(t,y))} v(z)\,dz \leq \int_{B_{\frac{7}{4}d(x)}(x)} v(z)\,dz \leq C\int_{B_{\frac{d(x)}{2}}(x)} v(z)\,dz$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \int_\Omega 1_{|\gamma(t,y)-x|<\frac{3}{4}d(x)}v(x)\left(v(B_{\frac{d(x)}{2}}(x)v(z))\right)^{-1}dx &\leq \int 1_{|\gamma(t,y)-x|<\frac{3}{4}d(x)}v(x)\,dx\left(v(B_{\frac{4}{7}d(\gamma(t,y))}(\gamma(t,y)))\right)^{-1} \\ &\leq \int_{B(\gamma(y,t),3d(\gamma(y,t)))} v(x)\,dx\left(v(B_{\frac{4}{7}d(\gamma(t,y))}(\gamma(t,y)))\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$\leq \quad C,$$

donde usamos nuevamente que v es doblante. En definitiva,

$$\begin{aligned}\int_\Omega W(x)v(x)\,dx &\leq C\int_\Omega\int_0^1 |\dot\gamma(y,t)|\,dtv(y)\,dy\\ &= C\int_\Omega l(\gamma(y))v(y)\,dy\\ &\leq C\int_\Omega d_\Omega(y)v(y)\,dy<\infty.\end{aligned}$$

□

Ahora pasamos a construir la solución de (2.1.17). Por una traslación y una dilatación de Ω, podemos asumir que $x_0 = 0$ y $d(0) = 15$. Elegimos una función $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ soportada en $\overline{B_1(0)}$ y tal que $\displaystyle\int_\Omega \chi(x)\,dx = 1$. Para cada $y \in \Omega$, sea $\tau(y)$ el menor $t > 0$ tal que $\gamma(t,y) \in \partial B_{\frac{1}{2}d(y)}(y)$ (si no existe tal t, elegimos $\tau(y) = 1$). Definimos la función $t \mapsto \rho(t,y)$ para $t \in [0,1]$ dada por:

$$\rho(t,y) = \begin{cases} \alpha|y-\gamma(t,y)| & \text{si} \quad t \leq \tau(y) \\ \\ \frac{1}{15}d(\gamma(t,y)) & \text{si} \quad t > \tau(y)\end{cases} \tag{2.1.21}$$

donde $\alpha = \frac{2}{15}\frac{d(\gamma(\tau(y),y))}{d(y)}$. Luego $\alpha \leq \frac{1}{5}$ y por construcción tenemos que $\rho(t,y) \leq \frac{1}{5}d(\gamma(t,y))$, de modo que $\gamma(t,y)+\rho(t,y)z \in \Omega$ para cada $t \in [0,1]$ y $z \in B_1(0)$. En efecto, si $t \leq \tau(y)$, luego $|y-\gamma(t,y)| \leq \frac{1}{2}d(y)$, lo que implica que $\rho(t,y) \leq \frac{\alpha}{2}d(y)$ y $d(y) \leq 2d(\gamma(t,y))$. Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $y \in \Omega$ y $z \in B_1(0)$. Tenemos que,

$$\varphi(y)-\varphi(z) = -\int_0^1 (\dot\gamma(t,y)+\dot\rho(t,y)z).\nabla\varphi(\gamma(t,y)+\rho(t,y)z)\,dt$$

multiplicando por $\chi(z)$ e integrando tenemos que

$$\varphi(y)-\int_\Omega\varphi\chi = -\int_{B_1(0)}\int_0^1 (\dot\gamma(t,y)+\dot\rho(t,y)z).\nabla\varphi(\gamma(t,y)+\rho(t,y)z)\chi(z)\,dt\,dz.$$

Como $\displaystyle\int_\Omega f = 0$, esto implica que,

$$\int_\Omega f\varphi = -\int_\Omega\int_{B_1(0)}\int_0^1 f(y)(\dot\gamma(t,y)+\dot\rho(t,y)z).\nabla\varphi(\gamma(t,y)+\rho(t,y)z)\chi(z)\,dt\,dz\,dy$$

cambiando z por $x = \gamma(t,y)+\rho(t,y)z$, esto queda

$$\int_\Omega f\varphi = -\int_\Omega\int_\Omega\int_0^1 f(y).\nabla\varphi(x)G(x,y)\,dx\,dy$$

donde definimos el núcleo G de la siguiente manera

$$G(x,y) = \int_0^1 \left(\dot{\gamma}(t,y) + \dot{\rho}(t,y) \frac{x-\gamma(t,y)}{\rho(t,y)} \right) \chi \left(\frac{x-\gamma(t,y)}{\rho(t,y)} \right) \frac{1}{(\rho(t,y))^n} \, dt.$$

Gracias a la condición del soporte en χ, tenemos que

$$|x - \gamma(t,y)| < \rho(t,y)$$

para que el integrando sea no nulo. Luego $G(x,y)$ está bien definido para $x \neq y$.

Lema 2.1.22. *Existe una constante $C > 0$, que depende de Ω y de los caminos γ, tal que para todo $x \in \Omega$*

$$\int_\Omega |G(x,y)| v(y) \, dy \leq C W(x) v(x)$$

Demostración. De acuerdo a la definición de ρ escribimos,

$$G(x,y) = G_1(x,y) + G_2(x,y)$$

$$G_1(x,y) = \int_0^{\tau(y)} \left(\dot{\gamma}(t,y) + \frac{\alpha \dot{\gamma}(t,y).(y-\gamma(t,y))}{|y-\gamma(t,y)|} \right) \chi \left(\frac{x-\gamma(t,y)}{\alpha |y-\gamma(t,y)|} \right) \frac{1}{\alpha^n |y-\gamma(t,y)|^n} \, dt$$

$$G_2(x,y) = \int_{\tau(y)}^1 \left[\dot{\gamma}(t,y) + (\dot{\gamma}(t,y).\nabla d(\gamma(t,y))). \frac{x-\gamma(t,y)}{d(\gamma(t,y))} \right] \chi \left(\frac{15(x-\gamma(t,y))}{d(\gamma(t,y))} \right) \frac{15^n}{d(\gamma(t,y))^n} \, dt.$$

Primero, estimamos $\int_\Omega |G_1(x,y)| v(y) \, dy$. Como $\chi \left(\frac{x-\gamma(y,t)}{\alpha |y-\gamma(t,y)|} \right)$ es no nulo tenemos que,

$$\begin{aligned} |x-y| &\leq (1+\alpha)|y-\gamma(t,y)| \\ &\leq \frac{1+\alpha}{2} d(y) \\ &\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha} d(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |x-\gamma(t,y)| &\leq \alpha |y-\gamma(t,y)| \\ &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x-y| \end{aligned}$$

obtenemos que,

$$|G_1(x,y)| \leq C \int_0^{\tau(y)} |\dot{\gamma}(t,y)| 1_{|x-\gamma(t,y)| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x-y|} \, dt |x-y|^{-n}$$

$$\leq \quad C|x-y|^{-n} l(\gamma(y) \cap B_{\frac{\alpha}{1-\alpha}|x-y|}(x))$$

como $\alpha \leq \frac{1}{5}$ se tiene que $\frac{\alpha}{1-\alpha}|x-y| \leq \frac{3}{8}d(x)$. Aplicando la propiedad (3)

$$|G_1(x,y)| \leq C|x-y|^{-n+1}$$

y luego,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G_1(x,y)v(y)\,dy &\leq \int_{|x-y|\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x)} |x-y|^{-n+1}v(y)\,dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-(k+1)}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x)\leq|x-y|\leq 2^{-k}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x)} |x-y|^{-n+1}v(y)\,dy \\
&\leq C\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)}d(x)\frac{1}{(2^{-k}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x))^n}\int_{|x-y|\leq 2^{-k}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x)} v(y)\,dy \\
&= Cd(x)\frac{1}{(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x))^n}\int_{|x-y|\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x)} v(y)\,dy \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k+1)}d(x)\frac{1}{(2^{-k}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x))^n}\int_{|x-y|\leq 2^{-k}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x)} v(y)\,dy \\
&\leq Cd(x)\frac{1}{(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x))^n}\int_{|x-y|\leq \frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x)} v(y)\,dy + Cd(x)\mathcal{M}_{loc,\Omega}v(x) \\
&\leq Cd(x)v(x) \leq CW(x)v(x)
\end{aligned}$$

donde usamos que $v \in A_1^{loc}(\Omega)$, $\frac{1}{d(x)^n}\int_{|x-y|\leq\frac{1+\alpha}{1-\alpha}d(x)} v(y)\,dy \leq Cv(x)$ en el anteúltimo paso y que $\omega(x)\left(\int_{B_{\frac{d(x)}{2}}(x)} v(y)\,dy\right)^{-1} \geq 1$ en el último paso.

Ahora estimamos $\displaystyle\int_\Omega |G_2(x,y)|v(y)\,dy$. Por un lado

$$|G_2(x,y)| \leq C\int_{\tau(y)}^1 |\dot\gamma(t,y)| 1_{|x-\gamma(t,y)|<\frac{1}{15}d(\gamma(t,y))}\frac{1}{d(\gamma(t,y))^n}\,dt.$$

En el dominio de integración, el cociente $\dfrac{d(x)}{d(\gamma(t,y))}$ está acotado por arriba y por abajo por $\frac{16}{15}$ y por $\frac{14}{15}$. Esto implica que,

$$|G_2(x,y)| \leq Cd(x)^{-n}l(\gamma(y)\cap B_{\frac{1}{14}d(x)}(x))$$

y por la propiedad (c)

$$|G_2(x,y)| \leq Cd(x)^{-n+1}$$

uniformemente en x e y y $G_2(x,.)$ está soportoda en el conjunto $\left\{y : dist(\gamma(y),x) < \frac{d(x)}{14}\right\}$. Luego

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega G_2(x,y)v(y)\,dy &\leq Cd(x)^{-n+1}\int_{\left\{y:dist(\gamma(y),x)<\frac{d(x)}{14}\right\}} v(y)\,dy \\
&\leq Cd(x)\omega(x)\left(\int_{B_{\frac{d(x)}{2}}(x)} v(y)\,dy\right)^{-1}\frac{1}{d(x)^n}\int_{B_{\frac{d(x)}{2}}(x)} v(y)\,dy \\
&\leq CW(x)\mathcal{M}_{loc,\Omega}v(x) \leq CW(x)v(x)
\end{aligned}
$$

□

Ahora verifiquemos que la u propuesta es solución y que vale la estimación que buscamos.

Teorema 2.1.23. *Sea* $u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy$*, entonces resuelve (2.1.17)*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \int_\Omega |G(x,y)||f(y)|v(y)\frac{1}{v(y)}\,dy \\
&\leq \int_\Omega |G(x,y)|v(y)\,dy \left\|\frac{f}{v}\right\|_{L^\infty} \\
&\leq CW(x)v(x)\left\|\frac{f}{v}\right\|_{L^\infty}
\end{aligned}
$$

y entonces $\dfrac{|u(x)|}{W(x)v(x)} \leq C\left\|\dfrac{f}{v}\right\|_{L^\infty}$.

Ahora veamos que u es solución, se tiene que

$$\int_\Omega u.\nabla\varphi = -\int_\Omega f\varphi$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, dado que podemos aplicar Fubini por el lema anterior y por el lema (2.1.20). Definimos

$$E_v^1(\Omega) := \left\{g \in L_v^1(\Omega) : W|\nabla g| \in L_v^1(\Omega)\right\}.$$

Sea $g \in E_v^1(\Omega)$, para $\varepsilon > 0$ chico definimos $f_\varepsilon = f1_{\Omega_\varepsilon}$ y $u_\varepsilon(x) = \int_\Omega G(x,y)f_\epsilon(y)\,dy$ entonces tenemos que $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ para todo $x \in \Omega$ y

$$|u_\varepsilon(x)| \leq C\left\|\frac{f}{v}\right\|_{L^\infty} W(x)v(x).$$

Por la propiedad (d) existe $\delta > 0$ tal que supp $u_\varepsilon \subset \Omega_\delta$. Más aún existe $C(\delta)$ de modo que

$$\frac{1}{C(\delta)} \leq W(x)v(x) \leq C(\delta) \text{ para todo } x \in \Omega$$

Luego se tiene que

$$\int_\Omega u_\varepsilon.\nabla g = -\int_\Omega f_\varepsilon g$$

y entonces usando la acotación de arriba y el teorema de convergencia dominada tenemos que,

$$\int_\Omega u.\nabla g = -\int_\Omega fg$$

□

Resolubilidad de la divergencia en $L^p_v(\Omega)$

Una pregunta natural, es si podemos extender el resultado anterior para $f \in L^p_v(\Omega)$. Esto es, queremos probar que existe una solución del problema

$$\begin{cases} \text{div } u = f \text{ en } \Omega \\ u.\nu = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1.24}$$

con la estimación

$$\left\|\frac{u}{W}\right\|_{L^p_v(\Omega)} \leq C||f||_{L^p_v(\Omega)}$$

Veremos que bajo ciertas condiciones del dominio se tiene la resolubilidad de (2.1.24). Para ver esto hay que utilizar que la existencia de solución de (2.1.24) es equivalente a la desigualdad de Poincaré con pesos

$$||g - g_{\Omega,v'}||_{L^{p'}_{v'}(\Omega)} \leq C||W|\nabla g|||_{L^{p'}_{v'}(\Omega)} \quad (P_{p'})$$

donde $g \in E^{p'}_{v'}(\Omega) := \left\{g \in L^{p'}_{v'}, \int_\Omega |W(x)\nabla u(x)|^{p'} v'(x)\, dx < \infty\right\}$. No haremos la prueba de esta equivalencia puesto que sale de manera análoga a la equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) del Lema 2.0.1. Luego de esto, se puede ver repitiendo las ideas de la Proposición 1.2.36 que si vale la desigualdad de Poincaré (P_1) vale $(P_{p'})$. Entonces tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.1.25. *Sea $1 < p \leq \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Asumamos que $d_\Omega \in L^1_v(\Omega)$. Luego, si $f \in L^p_{v,0}(\Omega)$ con $v \in A_1$, existe una función u a valores vectoriales tal que*

$$\begin{aligned} div\ u &= f \ en\ \Omega \\ u.\nu &= 0 \ en\ \partial\Omega \end{aligned}$$

que satisface la estimación

$$\left\|\frac{u}{W}\right\|_{L^p_v(\Omega)} \leq C||f||_{L^p_v(\Omega)}$$

donde $C > 0$ sólo depende de Ω y de la elección de caminos γ.

Demostración. Como $v \in A_1$ y $d_\Omega \in L^1_v(\Omega)$ por el Teorema 2.1.19 tenemos una solución de (2.1.17). Pero sabemos que esto es equivalente a la desigualdad de Poincaré (P_1). Con lo cual tenemos la desigualdad $(P_{p'})$ y por lo tanto tenemos la resolubilidad del problema (2.1.24). □

Estudiaremos cómo se comporta la función W en el caso de un dominio s-John.

Ejemplo 2.1.26. Recordemos que en Preliminares definimos los dominios s- John. Para estos dominios es posible elegir la familia de curvas $\gamma(y)$ de modo que no sólo se cumple (a)-(d) si no también

$$d(\gamma(\tau, y)) \geq C\tau^s$$

para todo $\tau \in [0, l(\gamma(y))]$, donde τ es la longitud de arco y $l(\gamma(y))$ es la longitud total del camino $\gamma(y)$. Además vimos que las longitudes de las curvas están acotadas. Con lo cual d_Ω es una función acotada y por lo tanto $d_\Omega \in L^1_v(\Omega)$. Entonces tenemos la resolubilidad de (2.1.17) y (2.1.24). Con esta elección de las curvas tenemos que

$$W(x) \leq d(x) v\left(B_{Cd(x)^{\frac{1}{s}}}(x)\right) v\left(B_{\frac{d(x)}{2}}(x)\right)^{-1}. \tag{2.1.27}$$

En efecto, sean $x, y \in \Omega$ tal que $dist_\Omega(\gamma(y), x) \leq \frac{1}{2}d(x)$. Entonces existe $\tau \in [0, l(\gamma(y))]$ que verifica,

$$|\gamma(\tau, y) - x| \leq \frac{1}{2}d(x)$$

y en consecuencia,

$$\tau^s \leq Cd(\gamma(\tau, y)) \leq Cd(x).$$

Además,

$$\begin{aligned} |y - x| &\leq |y - \gamma(\tau, y)| + |\gamma(\tau, y) - x| \\ &\leq \tau + \frac{1}{2}d(x) \leq Cd(x)^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

luego $y \in B_{Cd(x)^{\frac{1}{s}}}(x)$, con lo cual

$$\omega(x) \leq v(B_{Cd(x)^{\frac{1}{s}}}(x)).$$

Pero

$$W(x) = d(x)\omega(x)\left(v(B_{\frac{d(x)}{2}}(x))\right)^{-1} \leq d(x)v(B_{Cd(x)^{\frac{1}{s}}}(x))\left(v(B_{\frac{d(x)}{2}}(x))\right)^{-1}$$

Resolubilidad de la divergencia en espacios de Sobolev con pesos

Por la sección anterior sabemos que dado un peso $v \in A_1$ si $d_\Omega \in L^1_v(\Omega)$ entonces vale la desigualad $(P_{p'})$

$$||f||_{L^{p'}_{v'}(\Omega)} \leq ||W|\nabla f|||_{L^{p'}_{v'}(\Omega)} \tag{2.1.28}$$

donde $f \in L^{p'}_{v',0}(\Omega)$. Vamos a introducir un peso constante en los cubos de la descomposición de Whitney. Fijemos un cubo Q_j, si $x \in Q_j^*$ definimos $\tilde{W}(x)$ de la siguiente manera

$$\tilde{W}(x) := \sup_{y \in Q_j^*} W(y).$$

Es claro que $W(x) \leq \tilde{W}(x)$ con lo cual podemos reemplazar W por $\tilde{W}$ en la desigualdad (2.1.28). Esta desigualdad nos será de utilidad para probar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.29. *Sea Ω un dominio acotado tal que $d_\Omega \in L^1_v(\Omega)$, donde $v \in A_1$. Luego dada $f \in L^p_v(\Omega)$ existe $u \in W^{1,p}_{v\tilde{W}^{-p},0}(\Omega)$ tal que*

$$div\ u = f \ \ en\ \Omega$$

y

$$\left\|\frac{Du}{\tilde{W}}\right\|_{L^p_v(\Omega)} \leq C||f||_{L^p_v(\Omega)}.$$

Demostración. Siguiendo la demostración del Lema 2.0.1 se puede ver que la desigualdad (2.1.28), reemplazando W por $\tilde{W}$, implica la descomposición de f como suma de funciones f_j soportadas en cubos Q_j^* con integral cero de modo que

$$\sum_j \int_{Q_j^*} |f_j(x)|^p \frac{v(x)}{\tilde{W}(x)^p}\, dx \leq C \int_\Omega |f(x)|^p v(x)\, dx. \tag{2.1.30}$$

Ahora bien como $v \in A_1$ para cada f_j existe una funcion $u_j \in W^{1,p}_{v,0}(Q_j^*)$ tal que div $u = f_j$ y $||Du_j||_{L^p_v(Q_j^*)} \leq C||f_j||_{L^p_v(Q_j^*)}$. Ahora definamos $u = \sum_j u_j$, es claro que div $u = f$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|Du(x)|^p}{\tilde{W}(x)^p} v(x)\, dx &\leq C\sum_j \int_{Q_j^*} \frac{|Du_j(x)|^p}{\tilde{W}(x)^p} v(x)\, dx \\ &\leq C\sum_j \int_{Q_j^*} |f_j(x)|^p \frac{v(x)}{\tilde{W}^p(x)}\, dx \leq ||f||_{L^p_v(\Omega)}\end{aligned}$$

donde usamos que $\tilde{W}$ es constante en Q_j^* y la desigualdad (2.1.30). □

Observación 2.1.31. En el caso de un dominio Ω s- John podemos reemplazar en el resultado anterior $\tilde{W}$ por $d(x)v\left(B_{Cd(x)^{\frac{1}{s}}}(x)\right)v\left(B_{\frac{d(x)}{2})}(x)\right)^{-1}$. En efecto, por el Ejemplo 2.1.26 tenemos que $W(x) \leq d(x)v\left(B_{Cd(x)^{\frac{1}{s}}}(x)\right)v\left(B_{\frac{d(x)}{2}}(x)\right)^{-1}$. Luego se tiene la desigualdad (2.1.28) reemplazando W por $d(x)v\left(B_{Cd(x)^{\frac{1}{s}}}(x)\right)v\left(B_{\frac{d(x)}{2}}(x)\right)^{-1}$. Además es fácil ver que este peso es constante en cubos de Whitney. Para ver esto, basta observar que si Q es un cubo de tipo Whitney y $x, y \in Q$ entonces $|x-y| \leq C_n d(x)$ y $d(x) \approx d(y)$. Con lo cual podemos repetir todos los argumentos de la demostración anterior.

2.2. Desigualdad de Fefferman-Stein

Definimos la función maximal sharp

$$\mathcal{M}^{\#}f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q|$$

Una desigualdad fundamental para el estudio de la continuidad de los operadores integrales singulares en L^p_w con $w \in A_p$ es la llamada desigualdad de Fefferman-Stein:

$$\int |\mathcal{M}_d f(x)|^p w(x) \leq C \int |\mathcal{M}^{\#} f(x)|^p w(x) \tag{2.2.1}$$

donde

$$\mathcal{M}_d f(x) := \sup_{Q \text{ diádico } :Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy$$

es la función maximal diádica. Como consecuencia se obtiene

$$\int |f(x)|^p w(x) \leq C \int |\mathcal{M}^{\#} f(x)|^p w(x)$$

Como ya mencionamos en la introducción esta desigualdad fue generalizada en [DRS] para dominios Ω acotados y de John. Los autores introducen las siguientes maximales para $\sigma > 1$

$$\mathcal{M}_{\Omega,\sigma} f(x) := \sup_{Q \ni x : \sigma Q \subset \Omega} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

$$\mathcal{M}^{\#}_{\Omega,\sigma} f(x) := \sup_{Q \ni x : \sigma Q \subset \Omega} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|\, dy.$$

donde $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f$. Además fijado un cubo Q_0 se definen las maximales restringidas al cubo

$$\mathcal{M}_{Q_0} f(x) := \sup_{Q \ni x : Q \subset Q_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

$$\mathcal{M}^{\#}_{Q_0} f(x) := \sup_{Q \ni x : Q \subset Q_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|\, dy$$

y se obtienen los siguientes resultados de [DRS].

Lema 2.2.2. *Sea $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ un cubo , $1 \leq p < \infty$, $w \in A_\infty$ y $f \in L^1(Q_0)$. Si $\mathcal{M}^{\#}_{Q_0,1} f \in L^p_w(Q_0)$ entonces*

$$\int_{Q_0} |\mathcal{M}_{Q_0,1} f|^p w \leq C \int_{Q_0} |\mathcal{M}^{\#}_{Q_0,1} f|^p w + c w(Q_0) \left(\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |f| \right)^p$$

Como consecuencia de este lema los autores obtienen el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3. *Sea $\Omega \subset \Omega$ un dominio acotado y de John. Sea $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\sigma > 1$. Si $\mathcal{M}^{\#}_{\Omega,\sigma} f \in L^p_w(\Omega)$, luego*

$$||f - f_\Omega||_{L^p_{w,0}(\Omega)} \leq C||\mathcal{M}^{\#}_{\Omega,\sigma} f||_{L^p_w(\Omega)}$$

Para obtener este resultado los autores utilizaron la descomposición de funciones en $L^p_w(\Omega)$ y el lema anterior. En este trabajo obtenemos una generalización de este resultado, es decir que lo extendemos a una clase más general de pesos. Para esto también utilizamos la descomposición y generalizamos el lema anterior (Ver [DRS]).

Definimos la función maximal sharp local

$$\mathcal{M}^{\#}_{\Omega,loc} f(x) = \sup_{x \in Q \subset \Omega} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| \, dx$$

donde el supremo se toma sobre todo los cubos tales que $diam(Q) < \gamma dist(Q, \partial\Omega)$ para algún $\gamma < 1$ fijo.

Lema 2.2.4. *(Lemma 3,[I]) Sea $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$, $diam(Q_0) < \gamma dist(Q_0, \partial\Omega)$, para algún $\gamma < 1$. Si $f \in L^1(Q_0)$, para cada $\alpha \geq |f|_{Q_0}$ existen cubos $Q_j^\alpha \subseteq Q_0$, $j \in \mathbb{N}$ tal que*

(a) $\alpha < \dfrac{1}{|Q_j^\alpha|} \displaystyle\int_{Q_j^\alpha} |f| \leq 2^n \alpha.$

(b) Si $\alpha \geq \beta \geq |f|_{Q_0}$, luego cada cubo Q_j^α es un subconjunto de la familia $\left\{Q_j^\beta : j \in \mathbb{N}\right\}$.

(c) $|f| \leq \alpha$ *en* $Q_0 \backslash \left\{\bigcup_j Q_j^\alpha\right\}$

(d) $\bigcup_j Q_j^\alpha \subset \{\mathcal{M}_{Q_0} f > \alpha\}$

(e) $\{\mathcal{M}_{Q_0} f > 5^n \alpha\} \subset \bigcup_j 5Q_j^\alpha$

Observación 2.2.5. Los cubos Q_j^α pueden elegirse de modo que los cubos $5Q_j^\alpha$ también sean admisibles. Para construir estos cubos definimos inductivamente las familias M_k, $k = 0, 1, ...$, de subcubos abiertos de Q_0. En primer lugar $M_0 = \{Q_0\}$. Ahora supongamos que M_k es una familia dada, entonces subdividimos cada cubo en 2^n cubos iguales. Estos cubos subdivididos forman la familia M_{k+1}. Sea $M = \bigcup_k M_k$, luego los cubos de M son disjuntos o bien uno está contenido en el otro. Además cualquier cubo $Q \in M$ inicia de manera única la sucesión creciente de cubos de M tal que

$$Q = Q_l \subset Q_{l-1} \subset \ \dots \subset Q_1 \subset Q_0 \tag{2.2.6}$$

donde $Q_s \in M_s$ $s = 0, 1, \dots l$ y $|Q_s| = 2^{-sn}|Q_0|$.

Ahora a partir de esta familia de cubos construiremos los cubos Q_j^α. Sea $Q \in M$ arbitrario, luego $Q \in \{Q_j^\alpha\}$ si y sólo si $\alpha < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|$ y $\frac{1}{|Q_s|}\int_{Q_s} |f| \leq \alpha$, $s = 0, 1, \dots, l-1$. Se puede ver que se satisfacen las propiedades del Lema 2.2.4.

Lema 2.2.7. *Sea $Q_0 \subseteq \Omega$, $1 \leq p \leq \infty$, $w \in A_\infty^{loc}(\Omega)$, y $f \in L^1(Q_0)$. Si $\mathcal{M}_{Q_0}^{\#} f \in L_w^p(Q_0)$, luego $\mathcal{M}_{Q_0} f \in L_w^p(Q_0)$ y*

$$\int_{Q_0} |\mathcal{M}_{Q_0} f|^p w \, dx \leq C \int_{Q_0} |\mathcal{M}_{Q_0}^{\#} f|^p w \, dx + C w(Q_0) \left(\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |f| \, dx \right)^p$$

Demostración. Como $w \in A_{loc}^\infty(\Omega)$, w es doblante se tiene que $w(5Q) \leq c_0 w(Q)$. Mostraremos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$w\left(\{\mathcal{M}_{Q_0} f > 5^n \alpha\}\right) \leq c_0 w\left(\left\{\mathcal{M}_{Q_0}^{\#} f > \delta\alpha\right\}\right) + c_0 \varepsilon w\left(\{\mathcal{M}_{Q_0} f > 2^{-n-1}\alpha\}\right)$$

para toda $f \in L^1(Q_0)$ y todo $\alpha \geq 2^{n+1}|f|_{Q_0}$. La constante δ depende de ε, n y w. Usando el lema anterior y que w es doblante, basta probar que

$$\sum_j w(Q_j^\alpha) \leq w\left(\left\{\mathcal{M}_{Q_0}^{\#} f > \delta\alpha\right\}\right) + \varepsilon w\left(\{\mathcal{M}_{Q_0} f > 2^{-n-1}\alpha\}\right).$$

Fijemos $Q \in \left\{Q_j^{\alpha 2^{-n-1}} : j \in \mathbb{N}\right\}$, como $w \in A_\infty^{loc}(\Omega)$ existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que si $E \subset Q$ y $|E| \leq \varepsilon_2 |Q|$ luego $w(E) \leq \varepsilon w(Q)$, donde ε_2 sólo depende de ε y w. Por (a) del lema anterior se tiene que $|f|_Q \leq \frac{\alpha}{2}$ y $\frac{1}{|Q_j^\alpha|}\int_{Q_j^\alpha} |f| \, dx > \alpha$, y esto implica que

$$\frac{1}{|Q_j^\alpha|}\int_{Q_j^\alpha} |f - |f|_Q| \, dx \geq \frac{1}{|Q_j^\alpha|}\int_{Q_j^\alpha} |f| \, dx - |f|_Q \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Multiplicando por $|Q_j^\alpha|$ y sumando sobre todos los Q_j^α contenidos en Q tenemos que

$$\sum_{Q_j^\alpha \subset Q} |Q_j^\alpha| \leq \frac{2}{\alpha}\int_Q |f - |f|_Q| \, dx.$$

Ahora consideremos dos casos:

1. $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - |f|_Q| \, dx \leq \frac{\alpha}{2}\varepsilon_2$.
   Luego $\sum_{Q_j^\alpha \subset Q} |Q_j^\alpha| \leq \varepsilon_2 |Q|$. Por elección de ε_2, $\sum_{Q_j^\alpha \subset Q} w(Q_j^\alpha) \leq \varepsilon w(Q)$, donde usamos que los Q_j^α son disjuntos.

2. $\dfrac{1}{|Q|}\displaystyle\int_Q |f-|f|_Q|\,dx > \dfrac{\alpha}{2}\varepsilon_2$. Esto significa que $\mathcal{M}^{\#}_{Q_0}f(x) > \delta\alpha$ para todo $x\in Q$, donde $\delta=\dfrac{\varepsilon_2}{2}$. En particular, $Q\subset\left\{\mathcal{M}^{\#}_{Q_0}f>\delta\alpha\right\}$ y $\displaystyle\sum_{Q_j^\alpha\subset Q} w(Q_j^\alpha)\le w(Q)=w(Q\cap \left\{\mathcal{M}^{\#}_{Q_0}f>\delta\alpha\right\})$.

Juntando este resultado obtenemos,

$$\sum_{Q_j^\alpha\subset Q} w(Q_j^\alpha)\le w(Q\cap\left\{\mathcal{M}^{\#}_{Q_0}f>\delta\alpha\right\})+\varepsilon w(Q).$$

Como $\alpha\ge 2^{n+1}|f|_{Q_0}$ vemos que sumando en la última estimación sobre los cubos disjuntos $Q\in\left\{Q_j^\alpha 2^{-n-1}:j\in\mathbb{N}\right\}$ todos los cubos de $\left\{Q_j^\alpha:j\in\mathbb{N}\right\}$ están contados exactamente una vez y así tenemos lo que queríamos probar. Ahora,

$$\begin{aligned}
I=\int_{Q_0}|\mathcal{M}_{Q_0}f|^p w(x)\,dx &= p\int_0^\infty t^{p-1}w(\{x\in Q_0:|\mathcal{M}_{Q_0}f|>t\})\,dt\\
&= p5^n\int_0^\infty (5^n u)^{p-1}w(\{x\in Q_0:|\mathcal{M}_{Q_0}f|>u5^n\})\,du\\
&\le p5^n\int_0^\infty (5^n u)^{p-1}c_0 w(\left\{x\in Q_0:\mathcal{M}_{Q_0}f^{\#}>\delta u\right\})\,du\\
&+ p5^n\int_0^\infty (5^n u)^{p-1}c_0\varepsilon w(\left\{x\in Q_0:\mathcal{M}_{Q_0}f>2^{-n-1}u\right\})\,du\\
&\le 5^{np}\frac{1}{\delta^{p-1}}c_0\int_{Q_0}|\mathcal{M}^{\#}_{Q_0}f(x)|^p w(x)\,dx\\
&+ 5^n p c_0\varepsilon\int_0^\infty (5^n u)^{p-1}w(\left\{x\in Q_0:\mathcal{M}_{Q_0}f>2^{n-1}u\right\}\,du\\
&= C\int_{Q_0}|\mathcal{M}^{\#}_{Q_0}f(x)|^p w(x)\,dx\\
&+ c_0\varepsilon p5^n\int_0^\infty (5^n 2^{n+1}t)^{p-1}w(\{x\in Q_0:\mathcal{M}_{Q_0}f>t\})2^{n+1}\,dt\\
&= II+III.
\end{aligned}$$

Vamos a acotar III,

$$\begin{aligned}
III &= p5^n c_0\varepsilon\int_0^\infty 2^{n+1}5^{-n}(5^n2^{n+1}s)^{p-1}w(\{x\in Q_0:\mathcal{M}_{Q_0}f>5^n s\})\,ds\\
&= C\int_{|f|_{Q_0}}^\infty 2^{n+1}5^{-n}(5^n2^{n+1}s)^{p-1}w(\{x\in Q_0:\mathcal{M}_{Q_0}f>5^n s\})\,ds\\
&+ C\int_0^{|f|_{Q_0}} 2^{n+1}5^{-n}(5^n2^{n+1}s)^{p-1}w(\{x\in Q_0:\mathcal{M}_{Q_0}f>5^n s\})\,ds\\
&= A+B
\end{aligned}$$

pero $B \le |f|_{Q_0}^{p-1} |f|_{Q_0} w(Q_0) = cw(Q_0)|f|_{Q_0}^p$. Por otro lado

$$A = c_0 \varepsilon 2^{(n+1)p} \int_{Q_0} |\mathcal{M}_{Q_0} f|^p w\, dx = c_0 \varepsilon 2^{(n+1)p} I$$

con lo cual eligiendo ε tal que $1 - c_0\varepsilon 2^{(n+1)p} > 0$ obtenemos que

$$I \le Cw(Q_0)|f|_{Q_0}^p + C \int_{Q_0} |M_{Q_0}^{\#} f|^p w\, dx.$$

$\square$

Lema 2.2.8. *Sea $Q_0 \subseteq \Omega$, tal que $diam(Q_0) < \gamma dist(Q_0, \partial\Omega)$ para algún $\gamma < 1$. Sea $w \in A_\infty^{loc}(\Omega)$ y $f \in L_0^1(Q_0)$. Si $\mathcal{M}_{Q_0}^{\#} f \in L_w^p(Q_0)$, luego $f \in L_{w,0}^p(Q_0)$ y*

$$||f||_{L_{w,0}^p(Q_0)} \le C||\mathcal{M}_{Q_0}^{\#} f||_{L_w^p(Q_0)}$$

donde la constante depende sólo de p y w.

Demostración. Como $\int_{Q_0} f = 0$, $\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} |f|\, dy \le \mathcal{M}_{Q_0}^{\#} f(x)$ para todo $x \in Q_0$. Entonces elevando a la p e integrando respecto de $w(x)dx$:

$$w(Q_0)\left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} |f|\, dx\right)^p \le \int_{Q_0} |\mathcal{M}_{Q_0}^{\#} f(x)|^p w(x)\, dx$$

y entonces usando el lema anterior,

$$\int_{Q_0} |\mathcal{M}_{Q_0} f|^p w(x)\, dx \le C \int_{Q_0} |\mathcal{M}_{Q_0}^{\#} f|^p w\, dx.$$

Como $|f| \le \mathcal{M}_{Q_0} f$ para casi todo $x \in Q_0$ se obtiene la desigualdad deseada. $\square$

Teorema 2.2.9. *Sea $w \in A_\infty^{loc}(\Omega)$ y $w \in L^1(\Omega)$. Supongamos que vale la descomposición en $L_{w'}^p(\Omega)$. Entonces tenemos que vale la desigualdad de Fefferman-Stein*

$$||f - f_\Omega||_{L_w^p(\Omega)} \le C||\mathcal{M}_{loc,\Omega}^{\#} f||_{L_w^p(\Omega)} \tag{2.2.10}$$

Demostración. Sea $h \in L_{w',0}^{p'}(\Omega)$, entonces podemos descomponerla en suma de funciones h_i soportadas en cubos Q_j^* tal que,

$$\left(\sum_{i\ge 0} ||h_i||_{L_{w',0}^{p'}}\right)^{1/p} \approx C||h||_{L_{w',0}^{p'}(\Omega)}.$$

Más aún, sólo finitos sumandos son no nulos. Observemos que $\int_\Omega fh$ está bien definida.

Además sólo finitos h_i son no nulos y $\int_{Q_i^*} h_i\, dx = 0$, entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (f-f_\Omega)h = \int_\Omega fh = \sum_i \int_{Q_i^*} fh_i &= \sum_i \int_{Q_i^*} (f - f_{Q_j^*})h_i \\
&\le \sum_i ||f - f_{Q_i^*}||_{L^p_{w,0}(Q_i^*)} ||h_i||_{L^{p'}_{w',0}(Q_i^*)} \\
&\le C \sum_i ||\mathcal{M}^{\#}_{Q_i^*} f||_{L^p_w(Q_i^*)} ||h_i||_{L^{p'}_{w',0}(Q_i^*)} \\
&\le C \sum_i ||\chi_{Q_i^*} \mathcal{M}^{\#}_{loc,\Omega} f||_{L^p_w(\Omega)} \\
&\le \left(\sum_i ||\chi_{Q_i^*} \mathcal{M}^{\#}_{loc,\Omega} f||^p_{L^p_w(\Omega)} \right)^{1/p} \left(\sum_i ||h_i||_{L^{p'}_{w',0}(Q_i^*)} \right)^{1/p'} \\
&\le C ||\mathcal{M}^{\#}_{loc,\Omega} f||_{L^p_w(\Omega)} ||h||_{L^{p'}_{w',0}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

donde usamos la superposición finita de los cubos Q_i^* y que $\mathcal{M}^{\#}_{Q_i^*} f(x) \le \chi_{Q_i^*} \mathcal{M}^{\#}_{loc,\Omega} f(x)$. Con lo cual,

$$\int (f - f_\Omega)h \le C||\mathcal{M}^{\#}_{loc,\Omega} f||_{L^p_w(\Omega)} ||h||_{L^{p'}_{w',0}(\Omega)}$$

y entonces por dualidad,

$$||f - f_\Omega||_{L^p_w(\Omega)} \le C||\mathcal{M}^{\#}_{loc,\Omega} f||_{L^p_w(\Omega)}$$

□

Ejemplo 2.2.11. Como ejemplos de pesos para los cuales vale el Teorema 2.2.9 tenemos los pesos potencias positivas. En efecto, sabemos que estos pesos están en la clase $A_\infty^{loc}(\Omega)$. Además la desigualdad de Poincaré mejorada vale para cualquier potencia positiva y aplicando el Lema 2.0.1 tenemos que vale la descomposición con cualquier potencia negativa y entonces podemos aplicar el teorema anterior para cualquier potencia positiva.

Capítulo 3

Estimaciones a priori

En este capítulo obtendremos estimaciones a priori de soluciones de sistemas elípticos generales en espacios de Sobolev con pesos en la clase A_p. Si bien estas estimaciones ya fueron obtenidas en [DST1] y [DST2], daremos una demostración más simple. Más aún, daremos cómo depende del peso la constante de las estimaciones a priori. Además para el caso de la ecuación de Poisson estudiaremos el caso radial en la bola unitaria. También proponemos dos condiciones suficientes para que valgan las estimaciones a priori con dos pesos para un problema elíptico general. Por último, obtendremos una condición necesaria para un peso para que valgan las estimaciones a priori de la ecuación de Poisson en el caso del laplaciano o potencias del laplaciano. Una parte de lo obtenido en este capítulo se encuentra en [CD]

3.1. Operadores elípticos generales

Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}u = f \text{ en } \Omega \\ &\mathcal{B}_j u = 0 \text{ en } \partial\Omega \;\; 1 \leq j \leq m-1 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado, $\mathcal{L}$ es un operador definido en Ω, uniformemente elíptico en el sentido de [ADN] de la forma:

$$\mathcal{L} = \sum_{0 \leq |\beta| \leq 2m} a_\beta(x) D_x^\beta$$

y los operadores $\mathcal{B}_j$ son operadores diferenciales de orden $m_j \leq 2m-1$ definidos de la siguiente manera

$$\mathcal{B}_j := \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) D_x^\alpha$$

donde los operadores $\mathcal{B}_j$ satisfacen la condición de complementaria del trabajo [ADN]. Además asumiremos las condiciones dadas en [K], si $\ell_0 := \max_j(2m - m_j)$,

$$a_\alpha \in C^{\ell_1+1}(\Omega) \qquad , \qquad b_{j\alpha} \in C^{\ell_1+1}(\partial\Omega) \tag{3.1.2}$$

con

$$\begin{aligned} \ell_1 &\geq \frac{3}{2}\ell_0, \quad \text{for } n \geq 3 \\ \ell_1 &\geq 2(\ell_0 + 1), \quad \text{for } n = 2 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

y

$$\partial\Omega \in C^{\ell_1+2m+1}. \tag{3.1.4}$$

Bajo estas condiciones existe la función de Green G y la solución u está dada por

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy. \tag{3.1.5}$$

Usaremos las siguientes estimaciones de la función G que fueron probadas en [K]

Teorema 3.1.6. *Para $|\gamma| = 2m$ y $0 < \alpha < 1$, bajo las hipótesis (3.1.2), (3.1.3) y (3.1.4) existen constantes que depende de $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}_j$, Ω y n tal que*

- *Si $2m - n - |\gamma_1| - |\gamma_2| < 0$*

  $$\left|D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x,y)\right| \leq C\, |x-y|^{2m-n-|\gamma_1|-|\gamma_2|}.$$

  Si $2m - n - |\gamma_1| - |\gamma_2| > 0$

  $$\left|D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x,y)\right| \leq C.$$

  Si $2m - n - |\gamma_1| - |\gamma_2| = 0$

  $$\left|D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x,y)\right| \leq C\, |\log |x-y||.$$

- *Si $\lambda = 2m - n - |\gamma_1| - |\gamma_2|$, $0 < \alpha < 1$*

  $$\left|D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x_1,y) - D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x_2,y)\right| \leq C\, |x_1 - x_2|^\alpha \left(|x_1 - y|^{\lambda-\alpha} + |x_2 - y|^{\lambda-\alpha}\right)$$

  para $\lambda < 0$.

  $$\left|D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x_1,y) - D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x_2,y)\right| \leq C$$

  para $\lambda > 0$.

  $$\left|D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x,y_1) - D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x,y_2)\right| \leq C\, |y_1 - y_2|^\alpha \left(|x - y_1|^{\lambda-\alpha} + |x - y_2|^{\lambda-\alpha}\right)$$

  para $\lambda < 0$.

  $$\left|D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x,y_1) - D_x^{\gamma_1} D_y^{\gamma_2} G(x,y_2)\right| \leq C$$

  para $\lambda > 0$.

La constante C puede variar en cada desigualdad.

Para obtener las estimaciones a priori la parte más díficil es acotar $D^\gamma u$ para $|\gamma| = 2m$. Luego comenzaremos estimando primero las derivadas de orden inferior.

Lema 3.1.7. *Si u es solución de (3.1.1) entonces*

$$|D^\gamma u(x)| \leq C\mathcal{M}f(x)$$

donde $|\gamma| \leq 2m-1$ y la constante C depende sólo de Ω, n y de $\mathcal{L}$.

Demostración. Observemos que si γ es tal que $|\gamma| \leq 2m-1$

$$D^\gamma u(x) = \int_\Omega D_x^\gamma G(x,y) f(y)\, dy$$

Veamos que

$$|D^\gamma u(x)| \leq C\mathcal{M}f(x)$$

Para ver esto, separamos en dos casos:

1. $2m - n - |\gamma| \neq 0$
2. $2m - n - |\gamma| = 0$

En el caso (1) tenemos dos posibilidades: Si $2m - n - |\gamma| < 0$ se tiene que:

$$|D_x^\gamma G(x,y)| \leq C\, |x-y|^{2m-n-|\gamma|}.$$

Entonces

$$|D^\gamma u(x)| \;\; \leq \;\; \int_\Omega C\, |x-y|^{2m-n-|\gamma|}\, |f(y)|\; dy$$

Ahora si $\delta = diam(\Omega)$ entonces

$$\begin{aligned}
|I| \leq C \int_{|x-y|\leq\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2m+|\gamma|}}\, dy \;\; &= \;\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-(k+1)}\delta \leq |x-y| \leq 2^{-k}\delta} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2m+|\gamma|}}\, dy \\
&\leq \;\; C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\delta 2^{-(k+1)})^{n-2m+|\gamma|}} \int_{|x-y|\leq 2^{-k}\delta} |f(y)|\; dy \\
&\leq \;\; C\mathcal{M}f(x) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(k+1)(2m-n-|\gamma|)|} \\
&= \;\; C\mathcal{M}f(x)
\end{aligned}$$

dado que la serie es convergente.

Por otro lado, si $2m-n-|\gamma|>0$, se tiene

$$|D^\gamma u(x)| \leq C\int_\Omega |f(y)|\,dy \leq C\mathcal{M}f(x)$$

En el caso (2) se tiene que

$$|D^\gamma_x G(x,y)| \leq C\,|\log|x-y||$$

pero usando que $|\log|x-y|| \leq \dfrac{1}{|x-y|^\varepsilon}$, donde $\varepsilon<n$, se puede utilizar el argumento de las coronas como en el caso anterior y obtener que $|D^\gamma_x u(x)| \leq C\mathcal{M}f(x)$. □

Lema 3.1.8. *Si u es solución de (3.1.1) y $|\gamma|=2m$ entonces*

$$D^\gamma u(x) = v.p\int_\Omega D^\gamma_x G(x,y)f(y)\,dy + c(x)f(x)$$

Demostración. Sea $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\left(\partial_{x_i}\int_\Omega D^\alpha_x G(x,y)f(y)\,dy,\phi\right) &= -\int_\Omega\left(\int_\Omega D^\alpha_x G(x,y)f(y)\,dy\right)\partial_{x_i}\phi(x)\,dx\\ &= -\int_\Omega\left(\int_\Omega D^\alpha_x G(x,y)\phi(x)\,dx\right)f(y)\,dy\\ &= -\int_\Omega H\phi(y)f(y)\,dx\end{aligned}$$

donde $|\alpha|=2m-1$ y $H\phi(y)=\int_\Omega D^\alpha_x G(x,y)\partial_{x_i}\phi(x)\,dx<\infty$ dado que $|D^\alpha_x G(x,y)|\leq C|x-y|^{1-n}$. Ahora sea $\Omega_\varepsilon := \Omega\cap\{|x-y|>\varepsilon\}$, entonces

$$\begin{aligned}H\phi(y) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{\Omega_\epsilon} D^\gamma_x G(x,y)\phi(x)\,dx + \int_{|\xi-y|=\varepsilon} D^\alpha_x G(\xi,y)\phi(\xi)\frac{\xi_i-y_i}{|\xi-y_i|}\,d\xi\right)\\ &:= \lim_{\varepsilon\to 0}(I+II).\end{aligned}$$

Analicemos la integral (II). Sumando y restando $\phi(y)$

$$\begin{aligned}II &= \int_{|\xi-y|=\varepsilon} D^\alpha G(\xi,y)\phi(y)\frac{\xi_i-y_i}{|\xi-y|}\,d\xi + \int_{|\xi-y|=\varepsilon} D^\alpha_x G(\xi,y)(\phi(\xi)-\phi(y))\frac{\xi_i-y_i}{|\xi-y|}\,d\xi\\ &:= \phi(y)H_{1,\varepsilon}(y)+H_{2,\varepsilon}\phi(y)\end{aligned}$$

Pero $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} H_{1,\varepsilon}(y)\phi(y)<+\infty$ en efecto

$$|H_{1,\varepsilon}(y)| \leq C\int_{|\xi-y|=\varepsilon}|\xi-y|^{1-n}\,d\xi = C\frac{\varepsilon^{1-n}}{\varepsilon^{n-1}} = C.$$

Por lo tanto $\lim_{\varepsilon \to 0} H_{1,\varepsilon}(y)\phi(y) \leq c(y)\phi(y)$, donde

$$c(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\xi - y| = \varepsilon} D^\alpha G(\xi, y) \frac{\xi_i - y_i}{|\xi - y|} \, d\xi$$

Más aún llamando $z = \xi - y$ se puede ver que c no depende de y.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |H_{2,\varepsilon}\phi(y)| &\leq \int_{|\psi - y| = \varepsilon} |D^\alpha G(\xi, y)||\phi(\xi) - \phi(y)| \, d\xi \\ &\leq C \int_{|\xi - y| = \varepsilon} |\xi - y|^{1-n} ||\nabla\phi||_\infty |\xi - y| \, d\xi = C||\nabla\phi||_\infty \varepsilon \to 0 \end{aligned}$$

con lo cual $\lim_{\varepsilon \to 0} H_{2,\varepsilon}\phi(y) = 0$. En definitiva, llegamos a lo que queríamos probar. □

Observemos que con este resultado si queremos acotar la norma en $L^p_w(\Omega)$ de $D^\gamma_x u$ para $|\gamma| = 2m$ tenemos que la norma del segundo término se acota fácilmente. Con lo cual, resta acotar la norma del primer término. Para esto necesitaremos algunos lemas. Como primer paso definimos el siguiente operador integral singular

$$T_\gamma f(x) = \int_\Omega D^\gamma_x G(x, y) f(y) \, dy, \text{ donde } f \in C^\infty_0(\Omega).$$

Lema 3.1.9. *Para todo $s > 1$ se tiene que*

$$\mathcal{M}^\#_\Omega (T_\gamma f)(x) \leq C(\mathcal{M}\,|f|^s)^{1/s}(x)$$

donde $\mathcal{M}^\#_\Omega$ es la maximal sharp restringida a Ω.

Demostración. Extendemos a f como cero fuera de Ω. Sea $Q \subseteq \Omega$ un cubo tal que $x \in Q$ y Q^* un expandido de Q por un factor 2. Escribimos $f = f_1 + f_2$, con $f_1 = f\chi_{Q^*}$ y elegimos $a = Tf_2(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\gamma f(y) - a| \, dy &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\gamma f_1(y)| \, dy + \frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\gamma f_2(y) - T_\gamma f_2(x)| \, dy \\ &= (i) + (ii). \end{aligned}$$

Por un lado como $s > 1$, sabemos por [ADN]

$$\begin{aligned} (i) \leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |T_\gamma f_1(y)|^s \, dy \right)^{\frac{1}{s}} &\leq \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f_1(y)|^s \, dy \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left(\frac{1}{|Q|} \int_{Q^*} |f(y)|^s \, dy \right)^{\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

$$\leq \; C(\mathcal{M}\,|f|^s)^{\frac{1}{s}}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(ii) &= \frac{1}{|Q|}\int_Q |T_\gamma f_2(y) - T_\gamma f_2(x)|\, dy &(3.1.10)\\
&= \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|\int D_x^\gamma G(y,z) f_2(z)\,dz - \int D_x^\gamma G(x,z) f_2(z)\,dz\right| dy &(3.1.11)\\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \int_{(Q^*)^c} |D_x^\gamma G(y,z) - D_x^\gamma G(x,z)|\,|f_2(z)|\,dz\,dy &(3.1.12)
\end{aligned}$$

acotando la diferencia de adentro de la integral

$$|D_x^\gamma G(y,z) - D_x^\gamma G(x,z)| \leq C\,|y-x|^\alpha \left(|y-z|^{-n-\alpha} + |x-z|^{-n-\alpha}\right)$$

con $0 < \alpha < 1$. Si usamos que $|y-z| \approx |x-z|$ y que $|x-z| \geq \left(\frac{1}{2}\right) l(Q)$ acotar (ii) se reduce a acotar la siguiente integral:

$$(I) = \frac{1}{|Q|}\int_Q \int_{(Q^*)^c} |y-x|^\alpha \frac{f(z)}{|x-z|^{n+\alpha}}\,dz\,dy.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned}
(I) &\leq \int_{(Q^*)^c} Cl(Q)^\alpha \frac{|f(z)|}{|x-z|^{n+\alpha}}\,dz\\
&= Cl(Q)^\alpha \sum_{k=-1}^{\infty} \int_{2^k l(Q)<|x-z|<2^{k+1}l(Q)} \frac{|f(z)|}{|x-z|^{n+\alpha}}\,dz\\
&\leq Cl(Q)^\alpha \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{(2^k l(Q))^{n+\alpha}} \int_{|x-z|\leq 2^{k+1}l(Q)} |f(z)|\,dz\\
&= Cl(Q)^\alpha \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^{k+1}l(Q))^n}\frac{1}{(2^k l(Q))^\alpha} \int_{|x-z|\leq 2^{k+1}l(Q)} |f(z)|\,dz\\
&\leq 2^n \sum_{k=-1}^{\infty} 2^{-k\alpha}\mathcal{M}f(x) \leq C\mathcal{M}f(x) \leq C\mathcal{M}(|f|^s)(x)^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}$$

□

Ahora veremos que el operador T_γ es continuo en $L^p_w(\Omega)$

Proposición 3.1.13. *Si* $1 < p < \infty$ *y* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *entonces* $||T_\gamma f||_{L^p_w(\Omega)} \leq C||f||_{L^p_w(\Omega)}$.

Demostración. Notemos $\overline{T_\gamma f} := \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega |T_\gamma f(x)|$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|T_\gamma f - \overline{T_\gamma f}\right|^p w(x)\,dx &\leq C\int_\Omega \left|\mathcal{M}_\Omega^\#(T_\gamma f)\right|^p w(x)\,dx \qquad (3.1.14)\\ &\leq C\int_\Omega (\mathcal{M}\,|f|^s)^{\frac{p}{s}}(x)w(x)\,dx \qquad (3.1.15)\end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad usamos el Teorema 2.2.9 y en la segunda la estimación puntual del Lema 3.1.9 para $s > 1$. Pero sabemos que existe s que depende de w tal que $1 < s < p$ y $w \in A_{\frac{p}{s}}$ y usando la continuidad de $\mathcal{M}$ en $L_w^{\frac{p}{s}}$ obtenemos de 3.1.14

$$\int \left|T_\gamma f(x) - \overline{T_\gamma f}\right|^p w(x)\,dx \leq C\int |f(x)|^p\,w(x)\,dx$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |T_\gamma f(x)|^p\,w(x)\,dx &\leq \int_\Omega \left|T_\gamma f(x) - \overline{T_\gamma f}\right|^p w(x)\,dx + \int_\Omega \left|\overline{T_\gamma f}\right|^p w(x)\,dx\\ &\leq C\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,w(x)\,dx + \int_\Omega \left|\overline{T_\gamma f}\right|^p w(x)\,dx\right)\end{aligned}$$

con lo cual nos falta acotar el último término. Pero,

$$\int_\Omega \left|\overline{T_\gamma f}\right|^p w(x)\,dx = \int_\Omega w(x)\,dx\,\left|\overline{T_\gamma f}\right|^p$$

como el peso w es localmente integrable se tiene que

$$\int_\Omega w(x)\,dx < \infty$$

luego es suficiente probar que

$$\left|\overline{T_\gamma f}\right|^p \leq C\,\|f\|^p_{L^p_w(\Omega)}. \qquad (3.1.16)$$

Por [ADN] se tiene que $T_\gamma f \in L^s$ para todo $s > 1$. Luego, tomando $1 < s < p$ y usando la desigualdad de Hölder primero con s y luego con $\frac{p}{s}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\overline{T_\gamma f}\right| &\leq \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |T_\gamma f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\\ &\leq C\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}}\\ &\leq C\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|^p w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w(x)^{-\frac{s}{p-s}}\,dx\right)^{\frac{p-s}{sp}}\end{aligned}$$

eligiendo s tal que $w \in A_{\frac{p}{s}}$ se tiene que el último término es finito, y por lo tanto, se tiene (3.1.16).

$\square$

Teorema 3.1.17. *Asumamos las hipótesis (3.1.2), (3.1.3) y (3.1.4). Luego, si* $1 < p < \infty$*,* $w \in A_p$ *y* $f \in L^p_w(\Omega)$*, existe una constante* C *que depende de* $\mathcal{L}$*,* $\mathcal{B}_j$*,* Ω*,* n *y* w *tal que*

$$\|u\|_{W^{2m,p}_w(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^p_w(\Omega)}$$

Demostración. La demostración es inmediata aplicando el Lema 3.1.7, la continuidad de la maximal de Hardy-Littlewood en $L^p_w(\Omega)$ (Teorema 0.0.23) y la Proposición 3.1.13. $\square$

3.1.1. Teorema A_p para las estimaciones a priori

Es posible obtener cómo depende de $[w]_{A_p}$ la constante C de la estimacion a priori (3.1.28). Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.1.18. *Sea* $w \in A_p$ *entonces vale que*

$$||u||_{W^{2,p}_w(\Omega)} \leq C[w]_{A_p}^{\max(1,\frac{1}{p-1})}||f||_{L^p_w(\Omega)}$$

donde C *depende de* p *y* n*.*

Demostración. Por el lema 2.3 de [DST1] se tiene que

$$|D^\gamma u(x)| \leq C\mathcal{M}f(x) \tag{3.1.19}$$

si $|\gamma| \leq 2m-1$ y

$$|D^\gamma u(x)| \leq C(T^*f(x) + \mathcal{M}f(x) + f(x)) \tag{3.1.20}$$

si $|\gamma| = 2m$, donde T^* es el operador maximal de un operador de Calderón-Zygmund. Entonces, aplicando la desigualdad 0.0.31 para la maximal de Hardy-Littlewood y el Teorema 0.0.33 para el operador T^*, tenemos que

$$||u||_{W^{2,p}_w(\Omega)} \leq C[w]_{A_p}^{\max(1,\frac{1}{p-1})}||f||_{L^p_w(\Omega)}$$

donde la constante C sólo depende de p , de n y de T. $\square$

Observación 3.1.21. Vale destacar que es necesario utilizar el Lema 2.3 de [DST1], pues no pudimos hallar la constante siguiendo nuestra demostración.

Ahora bien, además es posible probar que el exponente de $[w]_{A_p}$ es sharp en la desigualdad (3.1.1). Para ello necesitamos un resultado del trabajo [LPR] e introducir las siguientes definiciones: dado un operador T acotado en L^p definimos

$$\alpha_T := \sup\left\{\alpha \geq 0 : \forall\varepsilon > 0, \limsup_{p\to 1}(p-1)^{\alpha-\varepsilon}||T||_{L^p} = \infty\right\} \tag{3.1.22}$$

y

$$\lambda_T := \sup\left\{\lambda \geq 0 : \forall\varepsilon > 0, \limsup_{p\to\infty}\frac{||T||_{L^p}}{p^{\lambda-\varepsilon}} = \infty\right\}. \tag{3.1.23}$$

Con estas definiciones podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.1.24. *Sea T un operador (no necesariamente lineal). Supongamos que para algún $1 < p < \infty$ y para todo $w \in A_p$ tenemos la desigualdad*

$$||T||_{L^p_w} \leq C[w]^{\beta}_{A_p}.$$

Luego $\beta \geq \max\left(\lambda_T, \frac{\alpha_T}{p-1}\right)$.

Ahora veamos como utilizar este teorema para probar que el exponente $\max\left(1, \frac{1}{p-1}\right)$ es sharp. Llamemos β al exponente sharp para el cual

$$||u||_{W^{2,p}_w(\Omega)} \leq C[w]^{\beta}_{A_p}||f||_{L^p_w(\Omega)}.$$

Por la desigualdad (3.1.1) tenemos que $\beta \leq \max\left(1, \frac{1}{p-1}\right)$. Por otro lado por el Teorema 3.1.24 se tiene que $\beta \geq \max\left(\lambda_T, \frac{\alpha_T}{p-1}\right)$, donde en nuestro caso T es el operador dado por u o sus derivadas. Por ejemplo, consideremos el operador $D^\gamma u$ donde $|\gamma| = 2m$. Ahora notemos α_{2m} y λ_{2m} a (3.1.22) y (3.1.23) respectivamente en el caso de nuestro operador. Luego para calcular α_{2m} y λ_{2m} debemos estudiar las normas $||D^\gamma u||_{L^p}$ cuando $p \to 1$ y $p \to \infty$. Recordemos que por [DST1, Lema2.3] tenemos las desigualdad (3.1.20). Luego, utilizando esta desigualdad es inmediato que el operador $D^\gamma u$ es de tipo débil (1,1) y continuo en L^2. Utilizando el Teorema de interpolacioón de Marcinkiewicz se tiene que para $1 < p < 2$

$$||D^\gamma u||_{L^p} \leq 2\left(\frac{p}{(p-1)(2-p)}\right)^{\frac{1}{p}}||f||_{L^p} \approx \frac{1}{p-1}||f||_{L^p} \quad \text{cuando } p \to 1.$$

Por otro lado tenemos que $T^*f(x) \leq M(Tf)(x)$ y usando que M está acotada independientemente de p cuando $p \to \infty$ se tiene que

$$||D^\gamma u||_{L^p} \leq Cp||f||_{L^p} \quad \text{cuando } p \to \infty.$$

Resta ver que $||D^\gamma u||_{L^p} \geq C\frac{1}{p-1}||f||_{L^p}$ cuando $p \to 1$ y $||D^\gamma u||_{L^p} \geq Cp||f||_{L^p}$ cuando $p \to \infty$. Para ello daremos en cada caso un ejemplo. Recordemos el Ejemplo 3.2.4 de la sección anterior

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \text{ en } B_1(0) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ en } \partial B_1(0) \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

donde consideramos en este caso $f_\delta = \chi_{[0,\delta]}\delta^{-\frac{n}{p}}$ para δ suficientemente chico. Notar que $||f_\delta||_{L^p} = 1$ Luego $u(x) = u_0(|x|) = u_0(r)$, es tal que

$$\frac{\partial^2 u}{dr^2}(r) = \begin{cases} (1-n)r^{-n}\dfrac{\delta}{n} & \text{si} \quad r > \delta \\ \\ \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad r < \delta. \end{cases} \tag{3.1.26}$$

Si $\delta < \frac{1}{2}$ entonces

$$\int_{\delta<|x|<1} \left|\frac{\partial^2 u}{dr^2}\right|^p dx \approx \delta^{-n+np} \int_\delta^1 r^{-np+n-1}\, dr \approx \frac{1}{p-1}$$

con lo cual podemos concluir que $||D^2 u||_{L^p} \geq C\frac{1}{p-1}$.

Por otro lado, sea $n = 2$ y como antes $r = |x|$. Consideremos el problema

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{4xy}{r^2} \text{ en } B_1(0) \\ u = 0 \text{ en } \partial B_1(0). \end{cases} \tag{3.1.27}$$

Luego $u = xy\log r$ y entonces $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \log r + v$ donde v es una función acotada. Por un lado tenemos que

$$||f||^p_{L^p(B_1(0))} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^p\theta \sin^p\theta\, d\theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx 2\pi \int_0^1 r \log^p r\, dr \approx p \quad \text{cuando } p \to \infty$$

con lo cual se sigue que $Cp||f||_{L^p} \leq ||D^2 u||_{L^p}$ cuando $p \to \infty$.

Ahora usando que $||D^\gamma u||_{L^p} \approx \frac{1}{p-1}||f||_{L^p}$ cuando $p \to 1$ y $||D^\gamma u||_{L^p} \approx p||f||_{L^p}$ cuando $p \to \infty$ tenemos que por su definición $\alpha_{2m} = \lambda_{2m} = 1$ y entonces se sigue que $\beta = \text{máx}\left(1, \frac{1}{p-1}\right)$ obteniendo así el exponente sharp de (3.1.28).

3.1.2. Estimaciones a priori con dos pesos

Sea (w, v) un par de pesos definidos en $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Queremos dar una condición suficiente para que valga la siguiente estimación

$$\|u\|_{W_w^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_v^p(\Omega)} \tag{3.1.28}$$

donde u es solución de (3.1.1) y C es una constante que depende de p, n, w, v y el dominio Ω.

Definición 3.1.29. Sean (w,v) dos pesos. Diremos que $(w,v) \in \mathcal{A}_p$ si

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{-1/(p-1)}(x)\,dx\right)^{1/p'} < \infty$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ y $1 < p < \infty$.

Daremos una condición suficiente para que valga la estimación (3.1.28). Esta condición fue introducida por Neugebauer en [N].

Teorema 3.1.30. *(Theorem 3 [N]) Dado un par de pesos (w,v), existe $\omega \in A_p$ con $c_1 w \leq \omega \leq c_2 v$ si y sólo si existe $r > 1$ tal que $(w^r, v^r) \in \mathcal{A}_p$.*

Con este resultado obtenemos una condición suficiente para la continuidad de los operadores integrales singulares y el operador maximal de Hardy-Littlewood con dos pesos.

Teorema 3.1.31. *Si (w,v) son tales que existe $\omega \in A_p$ tal que $c_1 w \leq \omega \leq c_2 v$, el operador maximal de Hardy-Littlewood $\mathcal{M} : L_v^p \to L_w^p$, $T : L_v^p \to L_w^p$ un operador integral singular como en el Teorema 0.0.24 y $T_\gamma : L_v^p \to L_w^p$ son continuos.*

Demostración. Veamos el caso de $\mathcal{M}$, para T y T_γ sale de manera análoga.

$$\begin{aligned}
\left(\int |\mathcal{M}f(x)|^p\, w(x)\,dx\right)^{1/p} &\leq \left(\int |\mathcal{M}f(x)|^p\, \frac{\omega(x)}{c_1}\,dx\right)^{1/p} \\
&\leq C\left(\int |f(x)|^p\, \omega(x)\,dx\right)^{1/p} \text{continuidad de } \mathcal{M} \text{ con pesos } A_p \\
&\leq C\left(\int |f(x)|^p\, c_2 v(x)\,dx\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.32. *Sea u solución del problema (3.1.1). Supongamos que (w,v) es un par de pesos tal que $(w^r, v^r) \in \mathcal{A}_p$ para algún $r > 1$. Luego vale*

$$\|u\|_{W_w^{2m,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_v^p(\Omega)}$$

.

Demostración. Sabemos que si $(w^r, v^r) \in \mathcal{A}_p$ la maximal $\mathcal{M}$ y el operador T_γ son operadores continuos. Vimos que

$$|D^\gamma u(x)| \leq C\mathcal{M}f(x)$$

para $|\gamma| \leq 2m - 1$ y

$$D^\gamma u(x) = T_\gamma f(x) + c(x)f(x)$$

si $|\gamma| = 2m$. Además $w \leq Cv$ por el teorema de diferenciación de la integral y entonces obtenemos la estimación a priori.

□

Observación 3.1.33. Existe otra condición, introducida por Fujii en [F], que es suficiente para la continuidad de $\mathcal{M}$ y de T^* , donde T es un operador integral singular de Calderón-Zygmund como en el Teorema 0.0.24. Diremos que (w, v) satisfacen la condición W_p si existen $\alpha \in (0, 1)$, β y $C_0 \in (0, \infty)$ tal que para cada cubo Q y para todos los subconjuntos E y F de Q con $E \cap F = \emptyset$ y $|F| \geq \alpha|Q|$ se tiene que

$$\int_E w(x)\, dx \left(\frac{1}{|Q|} \int_{c(n,\alpha)Q} v^{1-p'}(x)\, dx \right)^p \leq C_0 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^\beta \int_F v^{1-p'}(x)\, dx < \infty$$

donde $1 < p < \infty$ y $c(n, \alpha)$ es una constante mayor que 1 dependiendo sólo de n y α, que es creciente con respecto a α. Es fácil ver que si $(w, v) \in W_p$ entonces $(w, v) \in \mathcal{A}_p$. Fujii probó que si $1 < p < \infty$ y(w, v) satisface la condición W_p, entonces

$$||T^*f||_{L^p_w} \leq C||f||_{L^p_v} \text{ y } ||\mathcal{M}f||_{L^p_w} \leq C||f||_{L^p_v}$$

donde la constante depende de C_0, α, β, p, y n. En el caso en que $\mathcal{L} = -\Delta$ o $(-\Delta)^m$ se tiene que valen las estimaciones a priori con un par de pesos $(w, v) \in W_p$. En efecto, por ejemplo en el caso de $\mathcal{L} = -\Delta$ usamos que

$$|u(x)| + |D_{x_i}u(x)| \leq C\mathcal{M}f(x)$$

$$\left|D_{x_ix_j}u(x)\right| \leq \{T^*f(x) + \mathcal{M}f(x) + |f(x)|\}$$

donde $T^*f(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|x-y|>\epsilon} D_{x_ix_j}\Gamma(x - y)f(y)\, dy \right|$ y Γ es la solución fundamental (para definición de la misma ver la próxima sección).

Cabe destacar que en [F] se construye un par de pesos (w, v) que satisfacen la condición W_p pero sin embargo w y $v^{1-p'}$ no están en A_∞. Es decir que podremos obtener estimaciones a priori con dos pesos que no están necesariamente en A_p.

3.2. Estimaciones a priori con pesos para la ecuación de Poisson

Consideramos el problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en} \quad \Omega \\ \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.1}$$

donde Ω es un dominio acotado tal que su borde $\partial\Omega$ es un borde C^2 y $w \in A_p$. Vimos que la solución de este problema está dada por

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy.$$

En este caso $G(x,y)$ puede escribirse de la siguiente manera

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) + h(x,y)$$

donde Γ es la solución fundamental del Laplaciano,

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|^{-1} & si \quad n=2 \\ \\ \frac{1}{n(n-2)w_n} |x|^{2-n} & si \quad n=3 \end{cases}$$

y $h(x,y)$ satisface para cada $y \in \Omega$

$$\begin{cases} \Delta_x h(x,y) = 0 & si \quad x \in \Omega \\ \\ h(x,y) = -\Gamma(x,y) & si \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2.2}$$

y si $P(y,Q)$ es el núcleo de Poisson $h(x,y)$ está dada por

$$h(x,y) = -\frac{1}{(n-2)w_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-Q|^{n-2}} P(y,Q)\, dS(Q) \tag{3.2.3}$$

donde w_n denota el área de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$ y dS la medida de superficie en $\partial\Omega$. Por lo que vimos antes tenemos que vale la estimación

$$||u||_{W^{2,p}_w(\Omega)} \leq C ||f||_{L^p_w(\Omega)}$$

donde la constante depende sólo de p, n y del peso w. Obtendremos algunos resultados en la línea de las estimaciones a priori para esta ecuación particular.

3.2.1. Ejemplo radial

Sea f una función radial, es decir $f(x) = f_0(|x|)$. Para $n > 1$ consideremos la ecuación,

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \text{ en } B_1(0) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ en } \partial B_1(0) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Luego existe solución radial de esta ecuación. Si llamamos $u(x) = u_0(|x|)$, la ecuación anterior nos queda

$$u_0''(r) + \frac{n-1}{r} u_0'(r) = f_0(r).$$

Ahora para hallar la solución llamamos $u_0' = v$. Con lo cual nos queda la siguiente ecuación,

$$v'(r) + \frac{n-1}{r} v(r) = f_0(r)$$

y la solución a esta ecuación es

$$v(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r f_0(t) t^{n-1}$$

Luego u y sus derivadas tienen la siguiente expresión,

$$u(x) = \int_0^r \frac{1}{s^{n-1}} \int_0^s f(t) t^{n-1}\, dt\, ds$$

$$D_{x_i} u(x) = C \frac{x_i}{r^n} \int_0^r f(t) t^{n-1}$$

$$\begin{aligned} D_{x_i x_j} u(x) &= \frac{x_i x_j}{r^2} \left[(1-n) r^{-n} \int_0^r f_0(t) t^{n-1}\, dt + f(r) \right] \\ &+ r^{1-n} \int_0^r f_0(t) t^{n-1}\, dt \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} \right) \\ &= \left(\frac{-n x_i x_j}{r^{n+2}} + \frac{\delta_{ij}}{r^n} \right) \int_0^r f_0(t) t^{n-1}\, dt + \frac{x_i x_j}{r^2} f_0(r) \end{aligned}$$

Primero supongamos que tenemos un peso $w(x)$ radial. Observar que para estimar

$$\int_{B_1(0)} |D_{x_i x_j} u(x)|^p w(x)\, dx$$

basta estimar

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{r^n} \int_0^r f_0(t) t^{n-1}\, dt \right|^p w(r) r^{n-1}\, dr.$$

lo que es igual a,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left| \int_0^r f_0(t) t^{n-1}\, dt \right|^p w(r) r^{n(1-p)-1}\, dr &\leq \int_0^1 |f_0(r)|^p r^{n(1-p)-1} w(r) r^{(n-1)p} r^p\, dr \\
&= \int_0^1 |f_0(r)|^p r^{n-1} w(r)\, dr \\
&= \int_{B_1(0)} |f(x)|^p w(x)\, dx
\end{aligned}
$$

donde usamos la desigualdad de Hardy que vale si y sólo si el peso cumple,

$$
\sup_{0<r<1} \left(\int_r^1 w(t) t^{n(1-p)-1}\, dr \right)^{1/p} \left(\int_0^r w(t)^{-\frac{1}{p-1}} t^{n-1}\, dt \right)
$$

Luego si el peso satisface la condición anterior, tenemos la estimación para las derivadas segundas.

Ahora obtenemos una estimación para las derivadas primeras,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} |D_{x_i} u(x)|^p w(x)\, dx &= C \int_0^1 \frac{x_i^p}{r^{np}} \left| \int_0^r f(t) t^{n-1} \right|^p w(r) r^{n-1} \\
&\leq C \int_0^1 r^{(1-n)p} \left| \int_0^r f(t) t^{n-1} \right|^p w(r) r^{n-1} \\
&\leq C \int_0^1 |r^{n-1} f_0(r)|^p w(r) r^{(n-1)(1-p)}\, dr \\
&= \int_0^1 |f_0(r)|^p r^{n-1} w(r)\, dr \\
&= \int_{B_1(0)} |f(x)|^p w(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

como aplicamos nuevamente la desigualdad de Hardy para que valga la desigualdad anterior necesitamos que el peso cumpla la siguiente condición

$$
\sup_{0<r<1} \left(\int_r^1 w(t) t^{(n-1)(1-p)}\, dt \right) \left(\int_0^r w(t)^{-\frac{1}{p-1}} t^{n-1} \right)^{p-1} < \infty.
$$

Por último, obtenemos una estimación para la norma de u

$$
\int_{B_1(0)} |u(x)|^p w(x)\, dx = \int_0^1 \left| \int_0^r \frac{1}{s^{n-1}} \int_0^s f_0(t) t^{n-1}\, dt\, ds \right|^p r^{n-1} w(r)\, dr
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\int_0^1 \left|\frac{1}{r^{n-1}}\int_0^r f_0(t)t^{n-1}\,dt\right|^p r^{n-1}w(r)\,dr \\
&= \int_0^1 \left|\int_0^r f_0(t)t^{n-1}\,dt\right|^p r^{(n-1)(1-p)}w(r)\,dr \\
&\leq \int_0^1 |f_0(r)|^p r^{n-1}w(r)\,dr
\end{aligned}
$$

la desigualdad anterior vale si el peso cumple,

$$
\sup_{0<r<1}\left(\int_r^1 w(t)t^{(n-1)(1-p)}\,dt\right)\left(\int_0^r w(t)^{-\frac{1}{p-1}}t^{n-1}\right)^{p-1} < \infty.
$$

y

$$
\sup_{0<r<1}\left(\int_r^1 w(t)t^{n-1}\,dt\right)\left(\int_0^r w(t)^{-\frac{1}{p-1}}t^{\frac{n-1}{1-p}}\right)^{p-1} < \infty.
$$

pues aplicamos la desigualdad de Hardy dos veces.

Para obtener las estimaciones a priori en este caso hemos aplicado la desigualdad de Hardy con dos pesos. El resultado general es el siguiente

Lema 3.2.5. *(Theorem 5, [KMP]) Si $1 \leq p < \infty$, luego la desigualdad*

$$
\int_a^b\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)^p w(x)\,dx \leq C\int_a^b f(x)^p v(x)\,dx
$$

vale para toda funcion medible $f \geq 0$ en (a,b) si y sólo si

$$
\sup_{a<r<b}\left(\int_r^b w(x)\,dx\right)\left(\int_a^r v(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \leq \infty.
$$

Ejemplo 3.2.6. Probemos la desigualdad de Hardy para el caso de un peso potencia en el intervalo $(0,1)$. Es decir, consideremos $w(t)=t^\alpha$. Sea $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, con f positivs, veamos que

$$
\int_0^1 F(x)^p x^\alpha\,dx \leq C\int_0^1 f(x)^p x^{\alpha+p}\,dx
$$

donde $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ Por un lado tenemos que por integración por partes

$$
\int_0^1 F(x)^p x^\alpha\,dx = F(x)^p\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)^{p-1}f(x)\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,dx
$$

Analizamos cada término. Por un lado $F(1)=0$, con lo cual basta ver qué pasa con $\lim_{x\to 0} F(x)^p x^{\alpha+1}$. Observemos que,

$$
F(x)^p \;=\; \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p \leq \left(\int_0^x f(t)^p t^{\alpha+p}\,dt\right)\left(\int_0^x t^{-\frac{\alpha+p}{p-1}}\,dt\right)^{p-1}
$$

$$\leq \; Cx^{-\alpha-1}\left(\int_0^x f(t)^p t^{\alpha+p}\,dt\right)$$

Entonces si $\alpha < -1$ se tiene que,

$$F(x)^p x^{\alpha+1} \leq C\int_0^1 f(x)^p x^{\alpha+p}\,dx$$

luego,

$$\int_0^1 F(x)^p x^\alpha\,dx \leq \frac{C}{\alpha+1}\int_0^1 f(x)^p x^{\alpha+p}\,dx + \frac{1}{\alpha+1}\left(\int_0^1 f(x)^p x^{\alpha+p}\right)^{1/p}\left(\int_0^1 F(x)^p x^\alpha\,dx\right)^{1/p'}$$

pero,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)^p x^{\alpha+p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 F(x)^p x^\alpha\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} &\leq \frac{1}{p}\left(\int_0^1 f(x)^p x^{\alpha+p}\right)\\ &+ \frac{1}{p'}\left(\int_0^1 F(x)^p x^\alpha\,dx\right)\end{aligned}$$

con lo cual,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{p'(\alpha+1)}\right)\left(\int_0^1 F(x)^p x^\alpha\,dx\right) &\leq \frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 f(x)^p x^{\alpha+p}\,dx\\ &+ \frac{1}{p(\alpha+1)}\int_0^1 f(x)^p x^{\alpha+p}\,dx\end{aligned}$$

y como $1-\dfrac{1}{p'(\alpha+1)} > 0$ tenemos lo que queríamos probar.

Ejemplo 3.2.7. Ahora aplicamos esto para obtener estimaciones a priori para el problema (3.2.4). Consideremos $w(x) = |x|^\alpha$. Determinaremos para qué rango de α tenemos estimaciones a priori con este peso potencia. En primer lugar observemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_1(0)} |u(x)|^p|x|^\alpha\,dx &= \int_0^1\left|\int_0^r \frac{1}{s^{n-1}}\int_0^s f_0(t)t^{n-1}\,dt\,ds\right|^p r^{n-1+\alpha}\,dr\\ &\leq C\int_0^1\left|\frac{1}{r^{n-1}}\int_0^r f_0(t)t^{n-1}\,dt\right|^p r^{n-1+\alpha+p}\,dr\\ &= C\int_0^1\left|\int_0^r f_0(t)t^{n-1}\,dt\right|^p r^{n-1+\alpha+p+(1-n)p+p}\,dr\\ &\leq C\int_0^1 |f_0(r)r^{n-1}|^p r^{n-1+\alpha+p+(1-n)p+p}\,dr\\ &= C\int_0^1 |f_0(r)|^p r^{n-1+\alpha+2p} = \int_{B_1(0)} |f(x)|^p|x|^{\alpha+2p}\end{aligned}$$

si α satisface las siguientes dos condiciones

$$n - 1 + \alpha < -1 \tag{3.2.8}$$

y

$$n - 1 + \alpha + p + (1 - n)p < -1 \tag{3.2.9}$$

en efecto, aplicamos dos veces la desigualdad de Hardy para el caso de pesos potencia como en el ejemplo. Ahora

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} |D_{x_i} u(x)|^p |x|^\alpha \, dx &= C \int_0^1 \frac{x_i^p}{r^{np}} \left| \int_0^r f_0(t) t^{n-1} \right|^p r^{\alpha+n-1} \, dr \\
&\leq C \int_0^1 \left| \int_0^r f_0(t) t^{n-1} \right|^p r^{\alpha+n-1+(1-n)p} \, dr \\
&\leq C \int |f_0(r) r^{n-1}|^p r^{\alpha+n-1+(1-n)p+p} \, dr \\
&= C \int_0^1 |f_0(r)|^p r^{(n-1)p+(1-n)p+\alpha+n-1+p} \, dr \\
&= C \int_0^1 |f_0(r)|^p r^{\alpha+n-1+p} \\
&= \int_{B_1(0)} |f(x)|^p |x|^{\alpha+p} \, dx
\end{aligned}$$

si se cumple

$$\alpha + n - 1 + (1 - n)p < -1 \tag{3.2.10}$$

pues, usamos la desigualad de Hardy con pesos potencia.

Por último

$$\int_{B_1(0)} |D_{x_i,x_j} u(x)|^2 |x|^\alpha \, dx \leq \int_0^1 \left| \frac{1}{r^n} f_0(t) t^{n-1} \, dt \right|^p r^{\alpha+n-1} \, dr + \int_{B_1(0)} |f(x)|^p |x|^\alpha$$

con lo cual basta acotar el primer término. Si usamos la desigualdad de Hardy del ejemplo tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left| \frac{1}{r^n} f_0(t) t^{n-1} \, dt \right|^p r^{\alpha+n-1} \, dr &\leq C \int_0^1 |f_0(r)|^p r^{(n-1)p} r^{\alpha+n(1-p)-1+p} \, dr \\
&= \int_0^1 |f_0(r)|^p r^{n-1+\alpha} = \int_{B_1(0)} |f(x)|^p |x|^\alpha \, dx
\end{aligned}$$

donde

$$\alpha + n(1 - p) - 1 < -1 \tag{3.2.11}$$

en conclusión es suficiente considerar $\alpha < -n$.

3.3. Condición necesaria para la estimaciones a priori para el problema de Dirichlet con potencias del laplaciano

Consideremos el siguiente problema de Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = f & \text{en} \quad \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

luego

$$u(x) = \int_\Omega G_m(x,y) f(y)\, dy$$

donde $G_m(x,y)$ es la función de Green del operador $(-\Delta)^m$ en Ω que puede escribirse de la siguiente manera $G_m(x,y) = \Gamma(x-y) + h(x,y)$ y Γ es la solución fundamental dada por

$$\begin{cases} c_{m,n}|x|^{2m-n}n & \text{impar o } n \text{ par } n > 2m \\ c_{m,n}|x|^{2m-n}\log|x| & n \text{ par } n \leq 2m \end{cases} \tag{3.3.2}$$

y $h(x,y)$ satisface la ecuación

$$\begin{cases} (-\Delta_x)^m h(x,y) = 0 & x \in \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j h(x,y) = -\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j \Gamma(x-y) & x \in \Omega \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

para cada $y \in \Omega$. Tenemos que

$$h(x,y) = -\sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} K_j(y,P) \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j \Gamma(P-x)\, dS \tag{3.3.4}$$

donde $K_j(y,P)$ son los núcleos de Poisson y dS denota la medida de superficie en Ω.

Sabemos por el Lema 3.1.8 que si u es solución de (3.3.1) y $|\gamma| = 2m$ entonces

$$D^\gamma u(x) = T_\gamma f(x) + c(x) f(x)$$

donde

$$T_\gamma f(x) = \int D^\gamma G_m(x,y) f(y)\, dy$$

y c es una función acotada. Sea $\bar{T}f(x) = T_\gamma f(x) + c(x)f(x)$. Si suponemos que valen las estimaciones a priori con un peso w para la ecuación (3.3.1) entonces el operador $\bar{T}$ es continuo en $L^p_w(\Omega)$ y por lo tanto T_γ también. Ahora bien, veremos que $w \in A^{loc}_p(\Omega)$. Observemos que el operador T_γ puede escribirse de la siguiente manera

$$T_\gamma f(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} D_x^\alpha \Gamma(x-y) f(y)\, dy + \int D_x^\alpha h(x,y) f(y) =: T_1 f(x) + T_2 f(x)$$

.

Por simplicidad consideraremos el caso en que n es impar o n par con $n \leq 2m$. Luego observaremos que también vale en el caso restante.

Observación 3.3.5. Para obtener la demostración del teorema nos basamos en la Sección 4.6 proposición 7 de [S1]. En esta sección se consideran operadores del tipo $Tf = f * K$ donde se cumplen las siguientes condiciones

- $||Tf||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.
- $|K(x)| \leq C|x|^{-n}$.
- $|D_{x_i} K(x)| \leq C|x|^{-n-1}$.
- Existe $C_n > 0$ y u_0 vector unitario tal que

  $$|K(x)| \geq C_n |x|^{-n}$$

  donde $x = tu_0$ para $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $|K(r(u+v) - K(ru)| \leq \frac{1}{2}|K(ru)|$ para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $|v| \leq 2$.

En la Proposición 7 el autor prueba que una condición necesaria para que esta clase de operadores sean continuos en L^p_w es que el peso w pertenezca a la clase A_p. Veremos que el operador T_1 es tal que cumple las condiciones anteriores. Otro ejemplo de operadores de este tipo son las tranformadas de Riesz n- dimensionales.

Lema 3.3.6. *Si $|\gamma| = 2m$ tenemos que*

1. *Existe $u_0 \in \mathbb{R}^n$ con $|u_0| = 1$ y una constante C_0 de modo que para todo número t positivo se tiene que*

   $$|D^\gamma \Gamma(tu_0)| \geq C_0 t^{-n}.$$

2. *Existe t_0 tal que si $u = tu_0$ y $|v| \leq 2$ entonces para todo número r no nulo vale la siguiente desigualdad*

   $$|D^\gamma \Gamma(r(u+v)) - D^\alpha \Gamma(ru)| \leq \frac{1}{2}|D^\gamma \Gamma(ru)|$$

Demostración. Observemos que como $D^\gamma\Gamma$ es homogénea de grado $-n$ y no nula existe $u_0 \in \mathbb{R}^n$ con $|u_0| = 1$ de modo que $|D^\gamma\Gamma(u_0)| = C_0 > 0$. Por lo tanto,

$$|D^\gamma\Gamma(tu_0)| = t^{-n}|D^\gamma\Gamma(u_0)| = C_0t^{-n}.$$

Ahora, para probar (2) basta notar que por homogeneidad podemos considerar $r = 1$. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $|v| \leq k|u|$ con $k \leq \frac{1}{2}$ a elegir. Luego para algún punto intermedio ξ entre u y $u + v$ se tiene que

$$|D^\gamma\Gamma(u + v) - D^\gamma\Gamma(u)| \leq |\nabla D^\gamma\Gamma(\xi)||v| \quad \leq \quad C_n|\xi|^{-n-1}|v|$$

y usando que $|u| \leq 2|\xi|, |v| \leq k|u|$ y (1) obtenemos

$$|D^\gamma\Gamma(u + v) - D^\gamma\Gamma(u)| \leq C_1k|u|^{-n} \leq \frac{C_1k}{C_0}|D^\gamma\Gamma(ru)|.$$

Consecuentemente es suficiente elegir k de modo que $\frac{C_1k}{C_0} \leq \frac{1}{2}$. Ahora como $|v| \leq 2$, si elegimos $t_0 = \frac{2}{k}$ se satisface la hipótesis $|v| \leq k|u|$ y así obtenemos (2). $\square$

Por último enunciamos el siguiente lema que utilizaremos para probar la condición necesaria.

Lema 3.3.7. *([DST2], Proposition 3.3) Existe una constante C que depende sólo de n tal que*

$$|D^\alpha h(x, y)| \leq Cd(x)^{-n}$$

para $|x - y| \leq d(x)$

Ahora probamos el resultado principal de esta sección

Teorema 3.3.8. *Sea w un peso y supongamos que vale la estimación a priori*

$$||u||_{W^{2m,p}_w(\Omega)} \leq C||f||_{L^p_w(\Omega)} \tag{3.3.9}$$

entonces $w \in A^{loc}_p(\Omega)$.

Demostración. Basta probar que, si para cada γ tal que $|\gamma| = 2m$

$$||T_\gamma f||_{L^p_w(\Omega)} \leq C||f||_{L^p_w(\Omega)}$$

entonces $w \in A^{loc}_p(\Omega)$. Recordemos que esto es equivalente a probar la desigualdad

$$\sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B w\right)\left(\frac{1}{|B|}\int w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} < \infty \tag{3.3.10}$$

en bolas admisibles, i.e. bolas B tal que $2r < \beta dist(B, \partial\Omega)$ para algún $\beta < 1$. Fijamos entonces una bola $B = B(\bar{x}, r)$ admisible, con β a determinar. Consideremos ahora la bola $B' = B(\bar{x} + ru, r)$, con $u = t_0 u_0$ como en el Lema 3.3.6. Veamos que se puede elegir β de modo que B' también sea admisible. Sea $x \in B'$ y $z \in \partial\Omega$ luego $x = \bar{x} + ru + rx'$ con $|x'| \leq 1$

$$\begin{aligned} |x - z| &= |\bar{x} + ru + rx' - z| \\ &\geq |\bar{x} - z| - r|u + x'| \\ &\geq dist(B, \partial\Omega) - r|u + x'| \\ &\geq \frac{1}{\beta} 2r - r|u + x'| \\ &\geq 2r\left(\frac{1}{\beta} - \frac{t_0 + 1}{2}\right). \end{aligned}$$

Luego tomando β tal que $\frac{1}{\beta} - \frac{(t_0+1)}{2} > 1$, i.e. $\beta < \frac{2}{t_0+3}$ se tiene que $2r < \alpha dist(B', \partial\Omega)$ donde $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} - \frac{(t_0+1)}{2}$.

Ahora sea $x \in B'$ e $y \in B$ y consideremos $f \in C_0^\infty(B)$ positiva. Veremos que $D^\gamma\Gamma(ru)$ tiene signo constante. Tenemos que $x = \bar{x} + ru + rx'$ e $y = \bar{x} + ry'$ con $|x'|, |y'| \leq 1$ con lo cual $x - y = ru + rv$ con $|v| = |x' - y'| \leq 2$. Por (2) del Lema 3.3.6 tenemos que si $D^\gamma\Gamma(ru) > 0$,

$$\frac{1}{2} D^\gamma\Gamma(ru) \leq D^\gamma\Gamma(x - y) \leq \frac{3}{2} D^\gamma\Gamma(ru). \tag{3.3.11}$$

De manera similar, si $D^\gamma\Gamma(ru) < 0$ se tiene que

$$\frac{3}{2} D^\gamma\Gamma(ru) D^\gamma\Gamma(x - y) \leq \frac{1}{2} D^\gamma\Gamma(ru). \tag{3.3.12}$$

Consecuentemente, tomando $f \in C_0^\infty(B)$ positiva, tenemos que

$$|T_1 f(x)| = \int_B |D^\gamma\Gamma(x - y)| f(y)\, dy.$$

Más aún usando (3.3.11), (3.3.12) y la propiedad (1) del Lema 3.3.6,

$$|T_1 f(x)| \geq \frac{1}{2} \int_B |D^\gamma\Gamma(ru)| f(y)\, dy \geq C_0 (rt_0)^{-n} \int_B f(y)\, dy = C_1 f_B.$$

donde la constante C_1 depende sólo de t_0, C_0 y n. Por otro lado para acotar $|T_2 f(x)|$ vamos a utilizar el Lema 3.3.7, pero para ello debemos ver que $|x - y| < d(x)$. Observemos que

$$|x - y| = |ru + r(x' - y')| \leq r(|u| + |x' - y'|) \leq r(t_0 + 2) < \frac{\alpha}{2} d(x)(t_0 + 2)$$

luego necesitamos que $\frac{\alpha}{2}(t_0 + 2) < 1$, equivalentemente $\beta < \frac{2}{2t_0+3}$. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned}|T_2 f(x)| \leq \int_B |D^\gamma h(x,y)| f(y)\, dy &\leq \int_B C d(x)^{-n} f(y)\, dy \\ &= C_2 (diam B')^{-n} \alpha^n \int_B f(y)\, dy \\ &= C_2 (diam B)^{-n} \alpha^n \int_B f(y)\, dy \\ &= C_2 \alpha^n f_B\end{aligned}$$

donde la constante C es la constante del Lema 3.3.7 y C_2 depende de n y C.

Juntando las dos desigualdades concluimos que

$$|Tf(x)| \geq (C_1 - C_2\alpha^n) f_B$$

pero para que $C_1 - C_2\alpha^n > 0$, basta tomar $\beta < \frac{1}{\frac{t_0+1}{2} + (\frac{C_2}{C_1})^{\frac{1}{n}}}$. Pero teniendo en cuenta las otras restricciones de β elegimos $\beta < \text{mín}\left(\frac{2}{2t_0+3}, \frac{1}{\frac{t_0+1}{2} + (\frac{C_2}{C_1})^{\frac{1}{n}}}\right)$ y obtenemos $|Tf(x)| \geq C f_B$, para $x \in B'$. Luego, aplicando la continuidad de T_γ

$$\begin{aligned}\int_{B'} (C f_B)^p w(x)\, dx \leq C \int_{B'} |T_\gamma f(x)|^p w(x) &\leq \int_\Omega |T_\gamma f(x)|^p w(x)\, dx \\ &\leq C \int_B f^p(x) w(x)\, dx\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$(f_B)^p w(B') \leq C \int_B f(x)^p w(x)\, dx. \tag{3.3.13}$$

Intercambiando los roles de B y B' y tomando f soportada en B' se puede ver que

$$(f_{B'})^p w(B) \leq C \int_{B'} f(x)^p w(x)\, dx. \tag{3.3.14}$$

si $C_1 - C_2\beta^n > 0$. Pero esta desigualdad se sigue por nuestra elección de β ($\alpha > \beta$). Por un pasaje al límite la desigualdades (3.3.13) y (3.3.14) pueden extenderse para cualquier función f no negativa soportada en B (o B' respectivamente). Tomando $f = \chi_{B'}$ en (3.3.14) obtenemos que

$$w(B) \leq C w(B'). \tag{3.3.15}$$

Usando esto en (3.3.13) se tiene que

$$(f_B)^p w(B) \leq C \int_B f(x)^p w(x)\, dx.$$

y aplicando la Proposición 1.2.5 concluimos que $w \in A_p^{loc}(\Omega)$.

$\square$

Bibliografía

[ACD] Acosta, G. ; Cejas, M.E. ; Durán, R., *Improved Poincaré inequalities and solutions of the divergence in weighted norms* Ann. Accad. Sci. Fenn. Math. 42, 2017, 1-16.

[ADM] Acosta, G. ; Durán, R. ; Muschietti, M. A., *Solutions of the divergence operator on John domains*, Math. Meth. Appl. Sci. (MMAS) 29 (4), (2006), 387-400.

[ADN] Agmon, S.; Douglis, A. ; Nirenberg, L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math 12 (1959), 623-727.

[BS] Boas, H. B.; Straube, E. J., *Integral inequalities of Hardy and Poincare type*, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 172-176.

[B] Bojarski, B., *Remarks on Sobolev imbedding inequalities*, in Lecture Notes in Math. 1351, 52-68, Springer-Verlag, Berlin (1989).

[Bu] Buckley S., *Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities*, Trans. Amer.Math. Soc., 340 (1993), no. 1, 53-272.

[BKL] Buckley S.; Koskela P.; Lu G., *Boman equals John*, XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium (Joensuu, 1995), de Gruyter, Berlin (1996), 91-99.

[CD] Cejas, M. E. ; Durán, R, *Weighted a priori estimates for elliptic equations*, Enviado a Studia Mathematica.

[CKN] Caffarelli, L.; Kohn, R; Nirenberg, L., *First order interpolation inequalities with weights*, Compositio Math. 53 (1984), 259-275.

[CF] Coifman, R. ; Fefferman, C., *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Mathematica 51.3 (1974), 241-250.

[CUMP] Cruz-Uribe, D.; Martell, J.M.; Pérez C., *Sharp two-weight inequalities for singular integrals, with applications to the Hilbert transform and the Sarason conjecture*, Adv. Math. 216 2 (2007), 647-676.

[CUMP2] Cruz-Uribe, D.; Martell, J.M.; Pérez C., *Weights, Extrapolation and the Theory of Rubio de Francia*, Operator Theory Advances and Applications 215 (2011).

[CW] Chanillo, S.; Wheeden, R., *Poincaré inequalities for a class of non-A_p weights*, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 605-623.

[C] Chua Seng-Kee, *Weighted Sobolev inequalities on domains satisfying the chain condition*, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), 449-457.

[DD] Drelichman, I. ; Durán, R., *Improved Poincaré inequality with weights*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 347 (2008), 286-293.

[DL] Durán, R; López García, F. *Solution of the divergence and Korn inequalities on domains with and external cusp*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math 35 (2010), 421-438.

[DRS] Diening, L. ; Ružicka, M. ; Schumacher, K., *A decomposition technique for John domains*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math 35 (2010), 87-114.

[Du] Duoandikoetxea, J. *Fourier analysis*, Amer. Math. Soc. 29 (2001).

[DM] Durán, R. ; Muschietti, M. A., *An explicit right inverse of the divergence operator which is continuous in weighted norms*, Studia Mathematica 148(3), 207-219, 2001.

[DMRT] Durán, R. ; Muschietti, M. A. ; Russ, E. ;Tchamitchian. P, *Divergence operator and Poincaré inequalities on arbitrary bounded domains*, Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal 55(8) (2010), 795-816.

[DST1] Durán, R. ; Sanmartino, M ; Toschi, M., *Weighted a priori estimates for Poisson equation*, Indiana University Math. Journal. 57, 3463-3478, 2008.

[DST2] Durán, R. ; Sanmartino, M ; Toschi, M., *Weighted a priori estimates for the solution of the homogeneous Dirichlet problem for the powers of the Laplacian Operator* Analysis in Theory and Applications, 26(4), 339-349, 2010.

[FKS] Fabes, E.B.; Kenig, C.E.; Serapioni, R.P., *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations 7:1 (1982), 77-116.

[FS] Fefferman, C; Stein, E. M.; *H^p spaces in several variables*, Acta Math 129 (1972), 3-4, 137-193.

[F] Fujii, N., *A condition for a two-weight norm inequality for singular integral operators*, StudiaMath. 98 (1991), 175-190

[Ga] Galdi, G., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Springer (1994), New York.

[GCRF] García-Cuerva, J.; Rubio de Francia, J. L., *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Publishing Co. Notas de Matemática 116 (1985).

[G] Gehring, F.W., *The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*, Acta Mathematica 130 (1973), 266-277.

[Ha] Hajlasz, P. *Sobolev inequalities, truncation method, and John domains*, Report. Univ. Jyväskylä 83 (2001), 109-126.

[HSV] Harboure, E.; Salinas, O.; Viviani, B., *Local maximal function and weights in a general setting*, Math. Ann. 358 (2014), no. 3-4, 609-628.

[HK] Heinonen, J.; Koskela, P., *A_∞-condition for the jacobian of a quasiconformal mapping*, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 535-543.

[H1] Hurri-Syrjanen, R., *An improved Poincaré inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. 120, (1994), 213-222.

[H2] Hurri-Syrjanen, R., *A weighted Poincaré inequality with a doubling weight*, Proc. Amer. Math. Soc. 126, (1998), 545-552.

[H] Hytönen, T *The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math. 175 (2012), 1473-1506.

[HP] Hytönen, T and Pérez, C, *Sharp weighted bounds involving A_∞*, Analysis and PDE 6 (2013), 777-818.

[HPR] Hytönen, T ; Pérez, C and Rela, E., *Sharp Reverse Hölder property for A_∞ weights on spaces of homogeneous type*, Journal of Functional Analysis 263, (2012) 3883-3899.

[HLP] Hytönen, T ; Lacey, M and Pérez, C, *Sharp weighted bounds for the $q-$ variation of singular integrals,* Bulletin London Math. Soc. V. 45 (2013) 529-540.

[HL] Hytönen, T.; Lacey, M., *The $A_p - A_\infty$ inequality for general Calderón-Zygmund operators*, Indiana Univ. Math. J. 61 (2012), no.6, 2041-2092.

[HLM] Hytönen, T.; Lacey, M.; Martikainen, H.; Orponen, T.; Reguera, M.; Sawyer, E.; Uriarte-Tuero, I. *Weak and strong type estimates for maximal truncations of Calderón-Zygmund operators on A_p weighted spaces*, J. Anal. Math. 118 (2012), no. 1, 177-220.

[I] Iwaniec, T., *On L_p-integrability in PDEs and quasiregular mappings for large exponents*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 7 (1982), no. 2, 301-322.

[IN] Iwaniec, T ; Nolder, C. A., *Hardy-Littlewood inequality for quasiregular mappings in certain domains in* $\mathbb{R}^n$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 10 (1985), 267-282.

[J] John, F., *Rotation and strain*, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 391-413.

[Jo] Journé, J, *Calderón-Zygmund operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy integral of Calderón* Lecture Notes in Mathematics, Springer, 994, (983)

[KMP] Kufner, A. ; Maligranda, L.; Persson, L. E. *The Hardy inequality-About its history and some related results*, Research report, Lulea University of Technology, Lulea, (2006).

[K] Krasovskii, J.P , *Isolation of the singularity in Green's function*, (Russian) Izv.Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 31 (1967) 977-1010.

[LPR] Luque, T.; Pérez, C.; Rela, E., *Optimal exponents in weighted estimates without examples*, Math. Res. Lett. 22 (2015), no. 1, 183-201.

[MS] Martio, O.; Sarvas, J., *Injectivity theorems in plane and space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math Ser. A I. Math. 4(1979), 383-401.

[M] Muckenhoupt, B. *Weighted norme inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol 165 (1972), 207-226.

[MW] Muckenhoupt, B. ; Wheeden, R., *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 192 (1974), 261-274.

[N] Neugebauer, C. J., *Inserting Ap-weights*, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 644-648.

[PR] Pérez, C. and Rela, E., *A new quantitative two weight theorem for the Hardy-Littlewood maximal operator*, Proc. Amer. Math. Soc., 143, February (2015), 641-655.

[P1] Petermichl, S, *The sharp bound for the Hilbert transform on weighted Lebesgue spaces in terms of the classical Ap characteristic*, Amer. J. Math. 129 (2007), no. 5, 1355-1375.

[P2] Petermichl, S, *The sharp weighted bound for the Riesz transforms*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), no. 4, 1237-1249.

[S] Schumacher, K, *Solutions to the equation div* $u = f$ *in weighted Sobolev spaces*, Technical Report 2511, FB Mathematik, TU Darmstadt, 2007.

[S1] STEIN, E. M., *Harmonic Analysis: Real variable-methods, ortogonality, and oscillatory integrals*, PRINCETON UNIV. PRESS, 1993.

[S2] STEIN, E. M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, PRINCETON UNIV. PRESS, 1970.

[S3] STEIN, E. M., *Note on singular integrals*, PROC. AMER. MATH. SOC. 8 (1957), 250-254.

[SAW] SAWYER, E. ; WHEEDEN, R. L., *Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces*, AMER. J. MATH. 114 (1992), NO. 4, 813-874

[SW] STEIN, E. M.; WEISS, G., *Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space*, J. MATH. MECH. 7 (1958), 503-514.

[StW] STROMBERG, J.; WHEEDEN, R., *Fractional integrals on weighted H^p and L^p spaces*, TRANS. AMER. MATH. SOC. 287 (1985), NO. 1, 293-321.